

**А.А. Локшин, Е.А. Иванова, О.В. Бахтина**

# **МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА**

*Учебное пособие*

3-е издание,  
исправленное и дополненное



---

МОСКВА – 2025

УДК 510(075.8)  
ББК 22.12я73  
Л73



<https://elibrary.ru/idcbee>

Рецензент:

*Е.А. Сагомонян* – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры  
волновой и газовой динамики мехмата МГУ

**Локшин, Александр Александрович.**

Л73     **Множества и логика** : Учебное пособие / А.А. Локшин, Е.А. Иванова, О.В. Бахтина. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : МАКС Пресс, 2025. – 88 с.: ил.  
ISBN 978-5-317-07366-4  
<https://doi.org/10.29003/m4365.978-5-317-07366-4>

В учебном пособии, предназначенном студентам педагогических институтов и колледжей – будущим учителям начальных классов, – изложены основы двух важнейших тем, способствующих формированию понятийного мышления. В третьем издании в гл. 1 включен новый материал, относящийся к неожиданным свойствам симметрической разности множеств, а в гл. 2 расширен материал, посвященный геометрическому анализу правильности форм умозаключений. Новый материал, добавленный в гл. 2, может быть полезен юристам.

В Добавлениях 1–3, появившихся в новом издании, рассмотрено парадоксальное взаимодействие закона контрапозиции и причинного следования, а также разобран ряд вопросов, связанных с пониманием математических текстов.

*Ключевые слова:* операции над множествами, высказывания, предикаты, кванторы, умозаключения.

УДК 510(075.8)  
ББК 22.12я73

**ISBN 978-5-317-07366-4**

© А.А. Локшин, 2017  
© А.А. Локшин, Е.А. Иванова, О.В. Бахтина,  
2025, с изменениями  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2025

## Содержание

Предисловие .....	5
<b>Глава 1. Элементы наивной теории множеств .....</b>	<b>6</b>
1. Множество и его элементы .....	6
2. Равенство множеств .....	6
3. Подмножества .....	7
4. Транзитивность включения множеств.....	8
5. Диаграммы Эйлера – Венна.....	8
6. Пустое множество. Универсальное множество .....	9
7. Способы задания множеств .....	9
8. Зачем нужны элементы множеств, когда есть одноэлементные подмножества?.....	10
9. Пересечение множеств .....	11
10. Объединение множеств.....	12
11. Взаимодействие операций пересечения и объединения множеств .....	14
12. Разность и дополнение множеств .....	17
13. Законы де Моргана .....	18
14. Дальнейшие свойства разности и дополнения.....	18
15. Формула включений и исключений.....	18
16. Декартово произведение множеств.....	21
17. Разбиение множества на классы по одному, двум и трем свойствам.....	24
18. О симметрической разности множеств .....	27
<b>Глава 2. Элементы математической логики .....</b>	<b>31</b>
1. Высказывания .....	31
2. Логические союзы .....	33

3. Простые и составные высказывания.....	34
4. Таблицы истинности для логических операций. Конъюнкция, дизъюнкция, отрицание .....	36
5. Таблицы истинности для логических операций. Импликация и эквиваленция.....	38
6. Важнейшие формулы, связывающие между собой логические операции .....	42
7. Геометрическая интерпретация закона контрапозиции...	43
8. Некоторые важнейшие схемы рассуждений .....	46
9. Предикаты: определение, примеры .....	48
10. Операции над предикатами .....	50
11. Множества истинности операций над предикатами ....	50
12. Логическое следование предикатов .....	51
13. Квантор общности .....	51
14. Квантор существования .....	53
15. Отрицание высказываний с кванторами.....	54
16. Кванторы и многоместные предикаты .....	55
17. Проверка правильности формы умозаключения на диаграммах Эйлера – Венна .....	57
18. Проверка правильности формы умозаключения на диаграммах Эйлера – Венна (продолжение).....	64
<b>Добавление 1.</b> Причинное следование и закон контрапозиции.....	69
<b>Добавление 2.</b> Первый парадокс школьной теории множеств .....	73
<b>Добавление 3.</b> Моделирование в педагогическом процессе и понимание .....	80
Литература.....	85

## Предисловие

В этом пособии излагается традиционный материал, акцент сделан на наглядность приводимых доказательств. Первая глава посвящена изложению элементов «наивной» теории множеств, вторая глава – началам логики. Авторы стремились везде, где это только возможно, использовать диаграммы Эйлера – Венна. Пособие адресовано, в первую очередь, студентам пединститутов и педагогических колледжей – будущим учителям начальных классов. Логика нашего изложения в значительной степени следует учебнику А.Е. Мерзона, А.С. Добротворского и А.Л. Чекина «Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов» – М., 1998. В третьем издании в гл. 1 включен новый материал, относящийся к неожиданным свойствам симметрической разности множеств, а в гл. 2 расширен материал, посвященный геометрическому анализу правильности форм умозаключений. Новый материал, добавленный в гл. 2, может быть полезен юристам.

Наконец, в Добавлении 1 рассматриваются интересные парадоксы, возникающие при попытке применения закона контрапозиции к причинному следованию, в Добавлении 2 разбираются трудности, связанные с преподаванием элементов теории множеств в начальной школе, а Добавление 3 посвящено важности геометрического моделирования для понимания школьной математики.

*Москва, 2025*

*Авторы*

## Глава 1

# ЭЛЕМЕНТЫ НАИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

## 1. Множество и его элементы

*Множеством* называют любую неупорядоченную совокупность объектов, каждый из которых называют *элементом* данного множества. Объекты, из которых образовано множество, не обязаны обладать каким-либо общим свойством (кроме принадлежности к данному множеству). Обычно обозначать множества мы будем заглавными латинскими буквами ( $A, B, C, D, \dots$ ), а элементы множеств, как правило, – строчными латинскими буквами. (Однако для обозначения элементов множеств нам могут понадобиться не только строчные латинские буквы, но и заглавные, а также цифры и другие символы.)

Тот факт, что объект  $b$  является элементом множества  $A$ , записывается в виде

$$b \in A. \quad (1.1)$$

Запись (1.1) читается так:

*« $b$  принадлежит множеству  $A$ ».*

## 2. Равенство множеств

Два множества  $A$  и  $B$  *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывается это так:

$$A = B. \quad (2.1)$$

Таким образом, равенство множеств – это их совпадение.

Если множества  $A$  и  $B$  не равны (не совпадают), это записывается в виде

$$A \neq B. \quad (2.2)$$

*Пример.* Допустим, что у господина Петрова в левой руке зажата копейка и в правой руке зажата копейка. Обозначим через  $A$  множество копеек в левой руке Петрова, а через  $B$  – множество копеек в правой руке Петрова. Равны ли множества  $A$  и  $B$ ? Очевидно, нет. **Эти множества не равны, так как их элементами являются разные объекты.**

### 3. Подмножества

Если все элементы множества  $B$  являются одновременно элементами множества  $A$ , то говорят, что  $B$  является *подмножеством* множества  $A$ . Обозначается это так:

$$B \subseteq A. \quad (3.1)$$

Запись (3.1) читается так:

$B$  включено в  $A$ »

или так:

« $B$  содержится в  $A$ ».

Значок  $\subseteq$  из формулы (3.1) – это символ *нестроого включения*. Запись (3.1) не исключает возможного равенства множеств  $A$  и  $B$ .

Для обозначения того факта, что  $B$  является подмножеством множества  $A$  и при этом  $A$  и  $B$  не равны, используется символ *строгого включения*  $\subset$ . Таким образом, запись

$$B \subset A \quad (3.2)$$

эквивалентна одновременному выполнению соотношений (3.1) и (2.2).

**Замечание.** Очевидно, что два множества  $A$  и  $B$  равны тогда и только тогда, когда каждое из них является подмножеством другого.

#### 4. Транзитивность включения множеств

**Утверждение 4.1.** Пусть  $B \subseteq A$  и  $C \subseteq B$ . Тогда  $C \subseteq A$ .

**Утверждение 4.2.** Пусть  $B \subset A$  и  $C \subset B$ . Тогда  $C \subset A$ .

Оба утверждения очевидны.

#### 5. Диаграммы Эйлера – Венна

На диаграммах Эйлера – Венна множества условно изображаются в виде кругов (или овалов). Каждая точка внутри круга, изображающего множество  $A$ , рассматривается как место, которое потенциально может занимать какой-нибудь элемент множества  $A$ . Вне соответствующего круга никакие элементы множества  $A$  не могут размещаться.

Еще раз подчеркнем, что речь идет не о самих множествах и их элементах, а об их условных изображениях. Утверждения 4.1 и 4.2 могут быть проиллюстрированы на соответствующих диаграммах Эйлера – Венна (рис. 5.1).

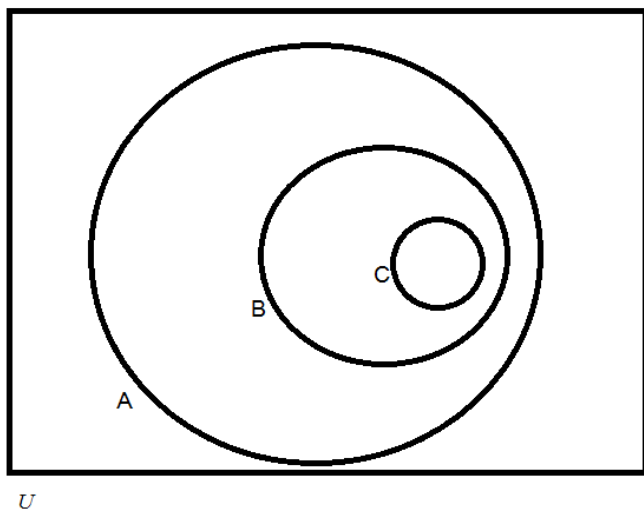


Рис. 5.1



## 6. Пустое множество. Универсальное множество

*Пустое множество*  $\emptyset$  – это множество, в котором нет ни одного элемента.

*Универсальное множество*  $U$  – это множество, состоящее из всех элементов, встречающихся в рассматриваемом классе задач.

**Замечание.** Необходимость во введении такого объекта как универсальное множество вызвана тем, что рассмотрение «множества всех множеств» приводит к логическому противоречию. Универсальное множество  $U$  обычно изображают в виде прямоугольника, внутри которого размещают диаграммы Эйлера – Венна.

По определению принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества  $A$ :

$$\emptyset \subseteq A. \quad (6.1)$$

Обосновывается соотношение (6.1) так: «У пустого множества нет ни одного элемента, не принадлежащего множеству  $A$ ».

## 7. Способы задания множеств

а) *Перечисление.* Перечисляемые элементы множества (или имена перечисляемых элементов множества) обычно размещают внутри фигурных скобок. Например:

$$A = \{1, b, w, 48\};$$

$$B = \{\text{корзина, картонка, собачонка}\}.$$

Вопрос о том, что именно мы перечисляем внутри фигурных скобок – сами объекты (элементы множества) или их имена – существен. В разных пособиях на него отвечают по-разному. Мы будем придерживаться соглашения о том, что *перечисляются имена элементов*.

б) *Задание множества с помощью характеристического свойства его элементов.*

Прежде всего, заметим, что *характеристическим свойством* называется такое свойство элементов множества, которым обладают все элементы данного множества и не обладают никакие другие объекты.

*Пример.* Множество  $\mathbb{C}$  положительных четных чисел можно задать так:

$\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{младшая цифра в десятичной записи числа } x - \text{четная}\}$  (здесь через  $\mathbb{N}$  обозначено множество натуральных чисел).

## **8. Зачем нужны элементы множеств, когда есть одноэлементные подмножества?**

Ответ на этот вопрос заключается в следующем. Разница между элементами и подмножествами закладывает свою образную иерархию структур в языке теории множеств. Именно эта иерархия позволяет создать гибкий математический язык, удобный для описания разнообразных задач. Следующий поясняющий пример взят из книги Ю.А. Шихановича.

*Пример.* Число 2 – четное, а множество  $\{2\}$  – одноэлементное.

*Пример.* Равные множества:

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\}.$$

*Пример.* Трехэлементное множество:

$$\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}.$$

## 9. Пересечение множеств

Пусть снова  $A$  и  $B$  – два множества. Их *пересечением*  $A \cap B$  называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству  $A$ , и множеству  $B$ .

Из этого определения, очевидно, следует, что

$$A \cap B = B \cap A \quad (9.1)$$

(коммутативность операции пересечения множеств).

Справедливость соотношения (8.1) можно проиллюстрировать на диаграмме Эйлера – Венна (рис. 9.1).

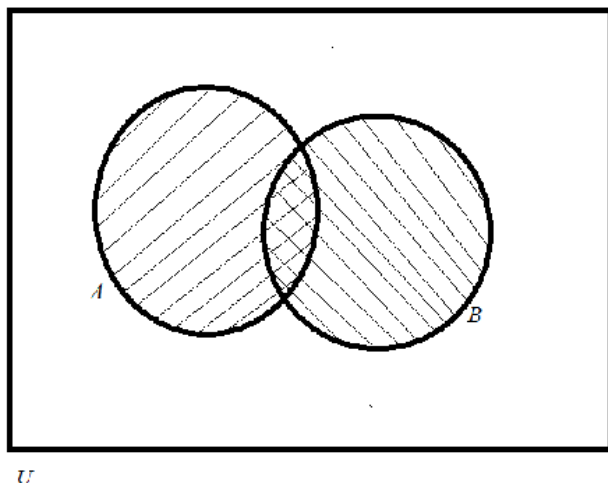


Рис. 9.1

Делается это в два этапа.

1-й этап. Вначале заштриховывают множество  $A$ , затем заштриховывают множество  $B$ . Все, что заштриховано *дважды*, и есть пересечение множеств  $A$  и  $B$ .

2-й этап. Вначале заштриховывают множество  $B$ , затем заштриховывают множество  $A$ . Все, что заштриховано *дважды*, и есть пересечение множеств  $B$  и  $A$ .

Как видно из рис. 9.1, оба раза в результате оказывается дважды заштрихованной одна и та же область. Тем самым равенство (9.1) считается доказанным.

Аналогично доказывается *ассоциативность* операции пересечения множеств. А именно, для любых трех множеств  $A, B, C$  справедливо соотношение:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \quad (9.2)$$

Справедливы также следующие очевидные свойства операции пересечения множеств (доказательства опускаем ввиду их очевидности):

$$A \cap A = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cap U = A.$$

## 10. Объединение множеств

Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. Их *объединением*  $A \cup B$  называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A, B$ .

Из этого определения, очевидно, следует, что

$$A \cup B = B \cup A \quad (10.1)$$

(*коммутативность* операции объединения множеств).

Справедливость соотношения (10.1) часто иллюстрируют на диаграмме Эйлера – Венна (см. рис. 9.1).

Делается это, как и в случае пересечения множеств, в два этапа.

1-й этап. Вначале заштриховывают множество  $A$ , затем заштриховывают множество  $B$ . Все, что заштриховано *хотя бы один раз*, и есть объединение множеств  $A \cup B$ .

2-й этап. Вначале заштриховывают множество В, затем заштриховывают множество А. Все, что заштриховано *хотя бы один раз*, и есть объединение множеств ВUА.

Как видно из рис. 9.1, оба раза в результате оказывается заштрихованной (хотя бы один раз) одна и та же область. Тем самым равенство (10.1) считается доказанным.

Аналогично доказывается *ассоциативность* операции объединения множеств. А именно, для любых трех множеств А, В, С справедливо соотношение:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \quad (10.2)$$

Справедливы также следующие свойства операции объединения множеств (доказательства не приводим ввиду их очевидности):

$$A \cup A = A,$$

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cup U = U.$$

(Ни в коем случае не следует путать обозначение универсального множества U с обозначением операции объединения множеств  $\cup$ )

**Замечание.** Кроме операции объединения двух множеств, в математике используется операция *одновременного объединения* нескольких множеств. Пусть, например, имеются множества  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Их одновременное объединение  $\cup_i A_i$  состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A_i$ . Мы будем считать очевидным, что одновременное объединение трех множеств А, В, С совпадает с (10.2).

## 11. Взаимодействие операций пересечения и объединения множеств

*Дистрибутивность операции пересечения относительно операции объединения:*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (11.1)$$

*(дистрибутивность справа);*

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad (11.1')$$

*(дистрибутивность слева).*

Формула (11.1) легко выводится с помощью штриховки на диаграмме Эйлера – Венна, где круги, изображающие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , следует расположить «в ситуации общего положения», а именно так, как показано на рис. 11.1.

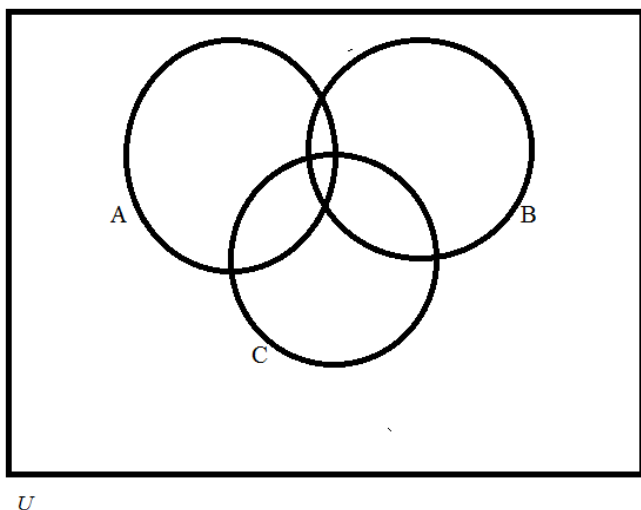


Рис. 11.1

Формула (11.1') сразу же следует из (11.1) в силу коммутативности операции пересечения.

Для разнообразия мы проведем доказательство соотношения (11.1) не на кругах Эйлера – Венна, а с помощью рассуждений.

### **Доказательство соотношения (11.1)**

а) Пусть элемент  $x$  принадлежит множеству из левой части равенства (11.1). Тогда  $x$  обязательно принадлежит множеству  $C$ , а также хотя бы одному из множеств  $A$ ,  $B$ . Отсюда сразу следует, что  $x$  принадлежит множеству из правой части равенства (11.1).

б) Пусть  $x$  принадлежит множеству из правой части равенства (11.1). Ясно, что тогда  $x$  принадлежит одновременно множествам  $A$  и  $C$  или принадлежит одновременно множествам  $B$  и  $C$ . В каждом из этих случаев получаем, что  $x$  принадлежит множеству из левой части (11.1).

Соотношение (11.1) доказано.

***Дистрибутивность операции объединения относительно операции пересечения:***

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (11.2)$$

*(дистрибутивность справа);*

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \quad (11.2')$$

*(дистрибутивность слева).*

Формула (11.2) легко выводится с помощью штриховки на диаграмме Эйлера – Венна. Формула (11.2') сразу же следует из (11.2) в силу коммутативности операции объединения.

### ***Законы поглощения:***

$$(A \cup B) \cap A = A, \quad (11.3)$$

$$(A \cap B) \cup A = A. \quad (11.4)$$

С помощью законов дистрибутивности (11.1) и (11.2) легко показать, что формулы (11.3) и (11.4) эквивалентны друг другу (одна выводится из другой). Однако законы дистрибутивности, как ни странно, не позволяют доказать ни одну из формул (11.3), (11.4).

Впрочем, обе эти формулы легко выводятся с помощью штриховки на диаграмме Эйлера – Венна. а также с помощью логических рассуждений. Приведем, в качестве примера, доказательство закона (11.3) с помощью рассуждений.

**Доказательство соотношения (11.3).** Итак, пусть  $x$  принадлежит множеству из правой части соотношения (11.3), т.е. является элементом множества  $A$ . Тогда, очевидно,  $x$  принадлежит обоим пересекающимся множествам из левой части (11.3). Следовательно,  $x$  принадлежит множеству из левой части (11.3).

Обратно, пусть  $x$  принадлежит множеству из левой части (11.3). Очевидно, что тогда  $x$  должен быть элементом каждого из пересекающихся множеств левой части (11.3). В частности,  $x$  должен быть элементом множества  $A$ . Но это означает, что  $x$  – элемент множества из правой части соотношения (11.3). Тем самым (11.3) установлено.

**Замечание.** В силу коммутативности каждой из операций объединения множеств и пересечения множеств законам поглощения можно придать следующую форму:

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad (11.3')$$

$$A \cup (A \cap B) = A. \quad (11.4')$$



## 12. Разность и дополнение множеств

*Разностью  $A \setminus B$  множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ .*

*Дополнением  $A'$  множества  $A$  называется разность универсального множества  $U$  и множества  $A$ . Таким образом,*

$$A' = U \setminus A. \quad (12.1)$$

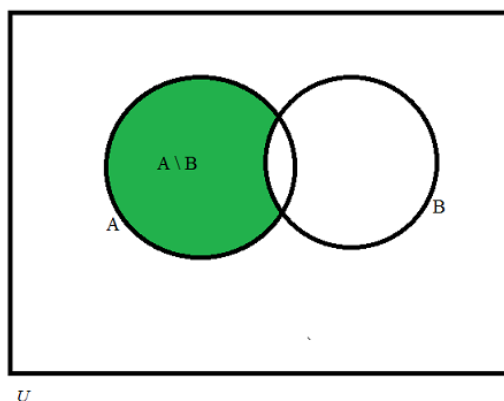


Рис. 12.1

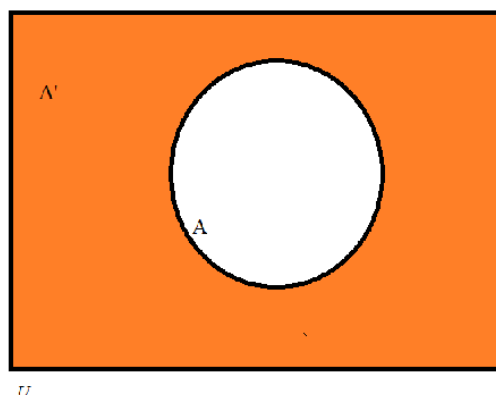


Рис. 12.2

### 13. Законы де Моргана

Справедливы следующие два важных соотношения, называемые *законами де Моргана*:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (13.1)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \quad (13.2)$$

Оба эти соотношения могут быть доказаны при помощи штриховки на диаграмме Эйлера – Венна, а также при помощи логических рассуждений.

### 14. Дальнейшие свойства разности и дополнения

Все приводимые ниже соотношения вполне очевидны, и мы их приводим без доказательства.

а)  $\emptyset' = U$ ,

б)  $U' = \emptyset$ ,

в)  $A \setminus \emptyset = A$ ,

г)  $A \setminus U = \emptyset$ ,

д)  $(A')' = A$ ,

е)  $A \cap A' = \emptyset$ ,

ж)  $A \cup A' = U$ .

### 15. Формула включений и исключений

#### 15.1. Численность объединения двух множеств

Пусть  $A$  и  $B$  – два конечных множества. Тогда верна формула:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (15.1)$$

(Здесь символом « $n$ » обозначается численность соответствующего множества.)

Справедливость формулы (15.1) очевидна из рис. 15.1.

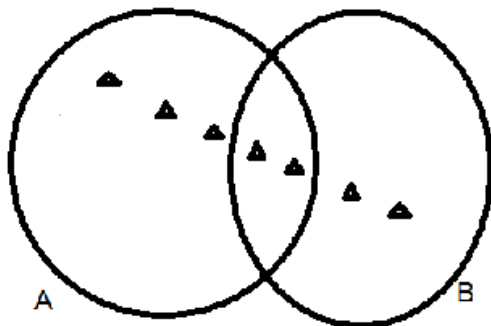


Рис. 15.1

Действительно, сосчитаем сначала элементы множества  $A$ , затем сосчитаем элементы множества  $B$  и сложим полученные числа. Очевидно, что элементы пересечения  $A \cap B$  были сосчитаны дважды, поэтому число этих элементов нужно отнять от суммы  $n(A) + n(B)$ .

*Пример.* Известно, что только Маша и Петя входят одновременно в число шестисот сильнейших шахматистов города и в число четырехсот слабейших шахматистов города. Сколько шахматистов в городе?

*Решение.* Обозначим через  $A$  множество сильнейших шахматистов города, а через  $B$  – множество слабейших шахматистов города. Из условия задачи известно, что  $n(A) = 600$ ,  $n(B) = 400$ . Ясно также, что  $n(A \cap B) = 2$ . Подставляя эти данные в формулу (15.1), получаем:

$$n(A \cup B) = 600 + 400 - 2 = 998.$$

*Ответ.* В городе 998 шахматистов.

*Задача.* Известно, что только Маша и Петя не могут похвастаться тем, что входят одновременно в число пяти-

сот сильнейших шахматистов города и в число пятисот слабейших шахматистов города. Сколько шахматистов в городе?

*Задача.* Известно, что только Маша и Петя не входят ни в число шестисот сильнейших шахматистов города, ни в число четырехсот слабейших шахматистов города. Сколько шахматистов в городе?

## 15.2. Численность объединения трех множеств

Пусть теперь у нас имеются не два, а три конечных множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Тогда верна следующая формула, аналогичная соотношению (15.1):

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = & n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ & - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Справедливость этой формулы нетрудно установить, проводя рассуждения, опирающиеся на рис. 15.2.

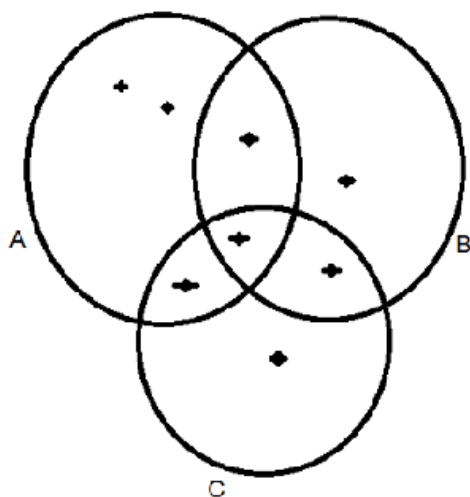


Рис. 15.2

## 16. Декартово произведение множеств

**Определение 16.1.** Декартовым произведением  $A \times B$  множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех упорядоченных пар вида  $(a; b)$ , где  $a$  – элемент множества  $A$ ,  $b$  – элемент множества  $B$ .

Иными словами,

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}. \quad (16.1)$$

*Пример.* Пусть  $A = \{1, 3, 5\}$ ;  $B = \{2, 7, 8, 9\}$ . Тогда элементы множества  $A \times B$  могут быть перечислены в табл. 16.1.

Таблица 16.1

	1	3	5
2	(1; 2)	(3; 2)	(5; 2)
7	(1; 7)	(3; 7)	(5; 7)
8	(1; 8)	(3; 8)	(5; 8)
9	(1; 9)	(3; 9)	(5; 9)

**Замечание.** Неупорядоченные наборы символов мы заключаем в фигурные скобки, а упорядоченные наборы – в круглые скобки. Это соглашение будет действовать всюду в дальнейшем.

Аналогичным образом определяется декартово произведение нескольких множеств.

**Определение 16.2.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – некоторые множества.

Тогда их декартовым произведением  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  называется совокупность всевозможных упорядоченных наборов вида  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ .

**Теорема 16.1.** *Число элементов декартова произведения двух конечных множеств равно произведению численностей этих множеств.*

**Доказательство.** См. таблицу 16.1, где перечислены элементы декартова произведения трехэлементного множества  $A = \{1, 3, 5\}$  и четырехэлементного множества  $B = \{2, 7, 8, 9\}$ . Общий случай рассматривается аналогично.

**Теорема 16.2.** *Число элементов декартова произведения нескольких конечных множеств равно произведению численностей этих множеств.*

**Теорема 16.3.** *Декартово произведение множеств не коммутативно и не ассоциативно.*

**Доказательство.** Докажем, например, некоммутативность декартова произведения. Для этого нам достаточно будет привести контрпример (т.е. пример, в котором нарушается коммутативность). Рассмотрим два множества:  $A = \{1\}$  и  $B = \{2\}$ . Тогда, очевидно, будем иметь:

$$A \times B = \{(1; 2)\},$$

$$B \times A = \{(2; 1)\},$$

откуда видно, что

$$A \times B \neq B \times A,$$

так как упорядоченные пары  $(1; 2)$  и  $(2; 1)$  различны между собой.

Аналогично (с помощью построения контрпримера) может быть доказана неассоциативность декартова произведения множеств.

**Теорема 16.4.** *Операция декартова произведения дистрибутивна относительно операций объединения, пересечения и разности множеств. Иными словами, для любых трех множеств  $A, B, C$  справедливы соотношения:*

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C); \quad (16.2)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A); \quad (16.2')$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C); \quad (16.3)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A); \quad (16.3')$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C); \quad (16.4)$$

$$(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A). \quad (16.4')$$

**Доказательство.** Докажем, например, (16.2). а) Пусть упорядоченная пара  $(x, y)$  принадлежит множеству из левой части (16.2). Это означает, что  $x$  является элементом множества  $A$  и что  $y$  является элементом по крайней мере одного из множеств  $B, C$ . Отсюда сразу же следует, что упорядоченная пара  $(x, y)$  принадлежит по крайней мере одному из множеств  $A \times B, A \times C$ . Следовательно,  $(x, y)$  принадлежит множеству из правой части (16.2).

б) Обратно, пусть упорядоченная пара  $(x, y)$  принадлежит множеству из правой части (16.2). Тогда обязательно  $(x, y)$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $A \times B, A \times C$ . Это, в свою очередь, означает, что  $x$  принадлежит множеству  $A$ , а  $y$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $B, C$ . Отсюда сразу следует, что пара  $(x, y)$  принадлежит множеству из левой части (16.2).

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

**Замечание.** В случае, когда  $A$  и  $B$  – числовые множества (не обязательно конечные), их декартово произведение удобно изображать на декартовой плоскости. Для этого нужно:

а) Разместить множество  $A$  на оси  $Ox$  и построить всевозможные вертикальные полосы, опирающиеся (проектирующиеся) на множество  $A$  (см. рис. 16).

б) Разместить множество  $B$  на оси  $Oy$  и построить всевозможные горизонтальные полосы проектирующиеся на множество  $B$ .

в) Пересечение всех этих вертикальных и горизонтальных полос и будет представлять собой изображение множества  $A \times B$  на декартовой плоскости.

*Пример.* Пусть

$$A = \{x | 1 \leq x \leq 2 \text{ или } 3 \leq x \leq 4 \text{ или } x = 5 \text{ или } x = 6\} \quad (16.5)$$

$$B = \{y | 2 \leq y \leq 3 \text{ или } y = 4\} \quad (16.6)$$

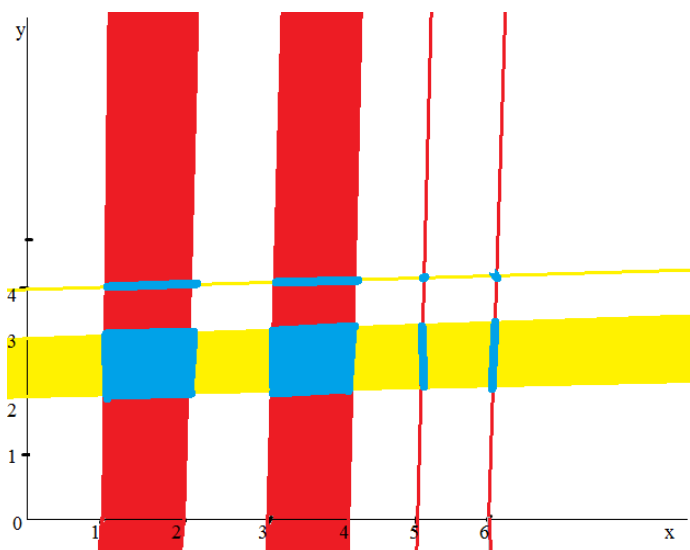


Рис. 16

## 17. Разбиение множества на классы по одному, двум и трем свойствам

**Определение 17.1.** Разбить множество на классы – это значит представить его в виде объединения непустых попарно непересекающихся подмножеств.



Непустое множество, которое мы собираемся разбить на классы в соответствии со свойствами его элементов, удобно представлять себе в виде универсального множества и, соответственно, обозначать его через  $U$ .

а) Допустим вначале, что существует одно-единственное свойство (свойство № 1), которым элементы нашего множества  $U$  могут обладать или не обладать. Обозначим через  $A$  подмножество нашего универсального множества, состоящее из всех элементов, обладающих свойством № 1. Тогда  $A'$  (т.е. дополнение множества  $A$ ) будет, очевидно, состоять из всех элементов, не обладающих свойством № 1. Таким образом, если в нашем распоряжении имеется только одно-единственное свойство, которым элементы могут обладать /не обладать, то максимально возможное количество классов, на которые удастся разбить множество  $U$ , равно двум (см. рис. 17.1). Заметим, что одно из двух непересекающихся множеств  $A$  и  $A'$  (см. рис. 17.1) может быть пусто.

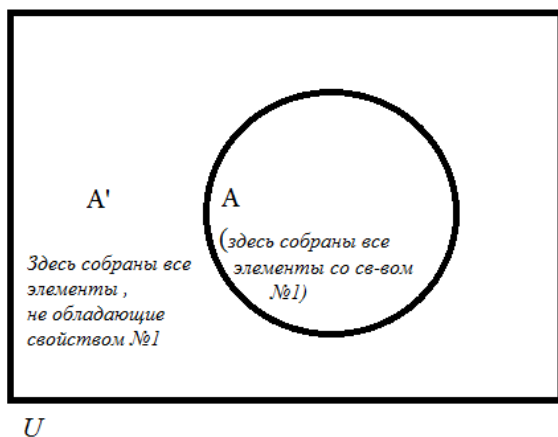


Рис. 17.1

б) Пусть теперь в нашем распоряжении появилось второе свойство (свойство № 2) которым (независимо от свойства №1) могут обладать/не обладать элементы из множества  $U$ . Обозначим совокупность всех элементов из  $U$ , обладающих свойством № 2, через  $B$ . Из рис. 17.2 видно, что максимальное количество классов, на которые может быть разбито множество  $U$  в соответствии с обладанием/не обладанием свойствами № 1 и № 2, равно четырем. Как видно из рис. 17.2, IV класс состоит из всех элементов, обладающих свойством № 2, но не обладающих свойством № 1. Подчеркнем, что некоторые из изображенных на рис. 17.2 подмножеств универсального множества могут быть пустыми.

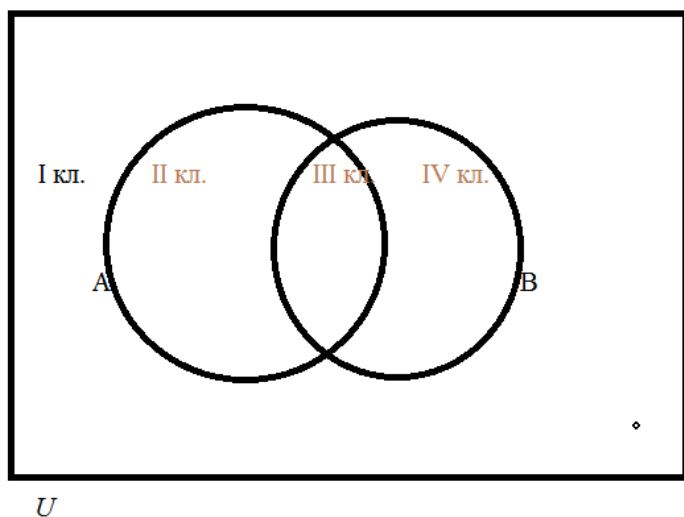


Рис. 17.2

в) Если число свойств (в соответствии с наличием/отсутствием которых проводится классификация) равно трем, максимально возможное количество классов в нашей задаче оказывается равным восьми (см. рис. 17.3).

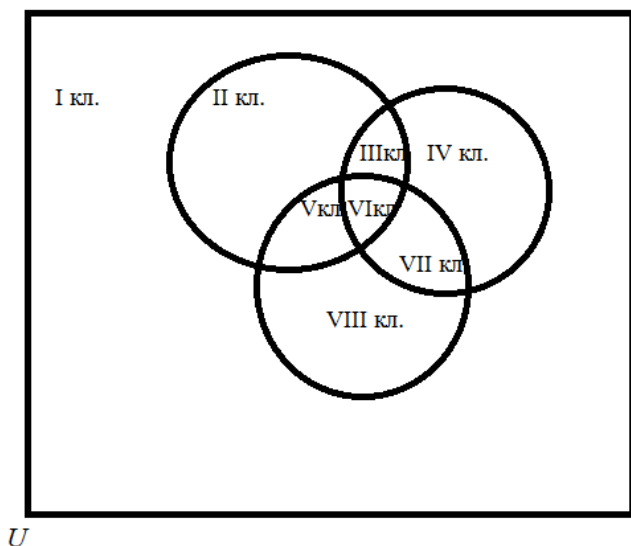


Рис. 17.3

**Замечание.** Задачи классификации объектов по одному, двум и даже трем свойствам оказываются доступными не только младшим школьникам, но и детям дошкольного возраста. Любопытно, что при решении этих задач детьми фактически используются диаграммы Эйлера – Венна (на плоскости размещаются обручи разных цветов, внутрь которых нужно поместить карточки с изображениями геометрических фигур). См. в этой связи замечательную книгу А.К. Звонкина «Малыши и математика» (М.: МЦНМО, 2006).

## 18. О симметрической разности множеств

Материал этого пункта взят из статьи [1].

Здесь рассматривается довольно неожиданное свойство симметрической разности множеств, позволяющее поставить ряд новых учебных задач в рамках наивной (не аксиоматической) теории множеств.

Прежде всего напомним, что симметрическая разность множеств  $A$  и  $B$  обозначается так:  $A \Delta B$ . Хорошо известны следующие свойства симметрической разности:

- (1)  $A \Delta B = B \Delta A$  (коммутативность);
- (2)  $A \Delta \emptyset = A$ ;
- (3)  $A \Delta U = A'$  (здесь  $U$  – универсальное множество,  $A'$  – дополнение к  $A$ );
- (4)  $A \Delta A = \emptyset$ ;
- (5)  $A \Delta A' = U$ .

Приведем, для полноты, также выражения симметрической разности через другие операции над множествами:

- (6)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;
- (7)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Любопытное свойство симметрической разности, отсутствующее в вышеприведенном списке – это

- (8)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$  (ассоциативность).

Для доказательства ассоциативности симметрической разности достаточно воспользоваться кругами Эйлера, изобразив на них соответственно левую и правую части соотношения (8). В результате получим, что обеим частям этого соотношения соответствует один и тот же рисунок (см. рис.18.1 и рис. 18.2).

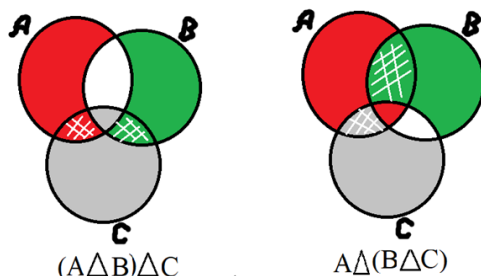
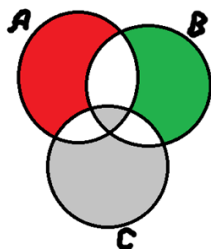


Рис. 18.1



$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

Рис. 18.2

Ассоциативность и коммутативность операции «симметрическая разность» позволяют в выражениях вида (8) обходиться без скобок, для определенности считая, что операции выполняются по порядку, слева направо.

Авторам ни разу не попадалось в учебной литературе упоминание об ассоциативности операции «симметрическая разность».

**Пример 1.** Не зная об этом свойстве, ученик (школьник или даже студент) столкнется со значительными трудностями при попытке упростить, например, выражение:

$$A \Delta B \Delta C \Delta B \Delta A.$$

Однако, пользуясь коммутативностью и ассоциативностью симметрической разности, мы, очевидно, можем переписать предыдущую формулу в виде:

$$A \Delta B \Delta C \Delta B \Delta A = (A \Delta A) \Delta (B \Delta B) \Delta C = \emptyset \Delta \emptyset \Delta C = C.$$

Но если случай трех множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  еще может быть рассмотрен при помощи диаграмм Эйлера – Венна, то с увеличением числа участвующих в формуле множеств задача упрощения аналогичной формулы начинает казаться нерешаемой, если не знать об ассоциативности операции «симметрическая разность».

**Пример 2.** Пусть требуется упростить формулу

$$A\Delta B\Delta C\Delta D\Delta A\Delta B\Delta C.$$

Действуя, как в предыдущем примере (т.е. опираясь на ассоциативность и коммутативность симметрической разности), легко получаем, что

$$A\Delta B\Delta C\Delta D\Delta A\Delta B\Delta C = D.$$

Ситуация становится еще интереснее, если в формулах присутствуют не только сами множества ( $A, B, C, \dots$ ), но и их дополнения ( $A', B', C' \dots$ ).

## Глава 2

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

## 1. Высказывания

**Определение 1.1.** *Высказыванием* называется любое повествовательное предложение, о котором можно определенно и однозначно сказать, что оно либо истинно, либо ложно.

*Примеры высказываний:*

- 1) «Петя кушает кашу.»
- 2) «Луна – это апельсин.»
- 3) «Дважды два пять.»
- 4) «На каждой елке висят шоколадные конфеты.»
- 5) «В учебнике математики 335 страниц.»

*Примеры предложений, не являющихся высказываниями.*

1) «Мне немного не по себе.» (Это повествовательное предложение не является высказыванием, так как неясно, что значит «не по себе» и в каком смысле следует понимать в этом предложении термин «немного».)

2) «Принеси, пожалуйста, кофе.» (Это не повествовательное предложение.)

3) «Здравствуйте!» (Это не повествовательное предложение.)

4) «Как пройти на площадь Трех вокзалов?» (Это не повествовательное предложение.)

5) «Я очень рад.» (Это повествовательное предложение не является высказыванием, так как невозможно в принци-

не проверить его истинность. Как отличить «очень рад» от просто «рад»?)

6) «Тише едешь, дальше будешь.» (Это повествовательное предложение представляет собой пословицу, которая не претендует на то, чтобы выражать истину во всех случаях жизни.)

**Замечание. Зависимость от контекста.** Во многих ситуациях истинность/ложность повествовательного предложения зависит от контекста. Однако если контекст выражен достаточно определенно, то такие предложения мы по-прежнему будем считать высказываниями.

*Примеры высказываний, истинность/ложность которых зависят от контекста.*

1) «Петя и Вася одного роста.» (Здесь все зависит от времени, когда измеряется рост Пети и Васи, а также от той точности, с которой проводятся измерения.)

2) «Маша и Даша одного возраста.» (Опять все зависит от точности произведенных измерений.)

3) «Образцы № 1 и № 2 одного веса.» (Снова все зависит от принятой точности измерений.)

**Замечание.** В дальнейшем мы будем часто использовать заглавные буквы (латинского и русского алфавитов) для обозначения высказываний. Пусть, например, А – некоторое высказывание. Тогда запись

$$A = И \quad (1.1)$$

будет означать, что высказывание А истинно, а запись

$$A = Л \quad (1.2)$$

будет означать, что высказывание А ложно.



## 2. Логические союзы

Важнейшими логическими союзами (без помощи которых мы не могли бы выражать сколько-нибудь сложные мысли) являются следующие:

«и»;

«или» (здесь для определенности имеется в виду неразделительное «или», смысл которого может быть выражен словами «хотя бы одно из двух»);

«не» («неверно, что»);

«если..., то»;

«тогда и только тогда, когда...»;

«либо..., либо».

Фактически перечисленные выше союзы представляют собой логические операции, действующие на высказывания. Для этих операций вводятся специальные математические названия и обозначения:

«и» —  $\wedge$  (конъюнкция);

«или» —  $\vee$  (дизъюнкция);

«не» —  $\neg$  (отрицание);

«если..., то» —  $\rightarrow$  (импликация);

«тогда, и только тогда, когда...» —  $\leftrightarrow$  (эквиваленция)

«либо..., либо» —  $\dot{\vee}$  (строгая дизъюнкция)

**Замечание.** В естественном языке один и тот же логический союз может выражаться разными способами. Например, конъюнкция может осуществляться не только при помощи союза «и», но и при помощи союзов «а», «но», при помощи запятой, точки с запятой. При этом появляются (или теряются) какие-то оттенки смысла, не влияющие на истинность/ложность высказывания.

**Замечание.** Результат перевода предложения с естественного языка на язык логики – это формула, обладающая определенной структурой и принимающая значение истина или ложь. Смысл исходного предложения при этом утрачивается. Однако это не значит, что смысл исходного предложения был несуществен на всех этапах. Для правильного перевода исходного предложения на язык логики необходимо это исходное предложение понимать!

### 3. Простые и составные высказывания

**Определение 3.1.** Высказывание называется *составным*, если оно может быть представлено в виде комбинации нескольких высказываний, соединенных между собой логическими союзами. В противном случае высказывание называется *простым*.

**Замечание.** Пусть  $A$  – некоторое простое высказывание. Тогда высказывание  $\neg A$  («не- $A$ », «неверно, что  $A$ ») по определению считается составным.

**Замечание.** Из определения 3.1 ясно, что каждое составное высказывание представляет собой комбинацию простых высказываний, соединенных между собой логическими союзами.

Приведем несколько примеров перевода составных высказываний с естественного языка на язык логики (результатом такого перевода, как уже говорилось, является логическая формула, своего рода «скелет» высказывания).

*Пример 1.*

«Если молоко не прокисло, я выпью стакан молока; в противном случае мне придется пить томатный сок или воду.» (3.1)

Перевод высказывания (3.1) на язык логики:

$$(M \rightarrow Y) \wedge (\neg M \rightarrow (TVB)). \quad (3.1')$$

Здесь М: *«Молоко не прокисло»*,

Я: *«Я выпью стакан молока»*,

Т: *«Мне придется пить томатный сок»*,

В: *«Мне придется пить воду»*.

**Замечание.** В (3.1') скобки указывают на последовательность логических операций, однако при обозначении операции отрицания мы обошлись без скобок, т.к. считаем, что оператор  $\neg$  всегда действует первым на ближайшее справа высказывание. Сделанное замечание относится также ко всему дальнейшему изложению.

*Пример 2.*

*«Я сдам экзамен по математике в том и только том случае, если выплусь; но выпататься мне удастся, только если я выключу компьютер в 9 часов вечера.»* (3.2)

Перевод высказывания (3.2) на язык логики:

$$(Y \leftrightarrow V) \wedge (V \rightarrow K). \quad (3.2')$$

(Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно определить, какие простые высказывания обозначены в (3.2') заглавными буквами В, К, Я.

*Пример 3.*

*«Маша и Петя – друзья, при этом они еще и соседи.»* (3.3)

Перевод высказывания (3.3) на язык логики:

$$D \wedge C. \quad (3.3')$$

Здесь Д: *«Маша и Петя – друзья»*,

С: *«Маша и Петя – соседи»*.

Заметим, что оба высказывания Д и С – простые (а не составные, невзирая на наличие в них союза «и»). Дело в том, что, например, предложение «Петя – сосед» не имеет смысла без указания на то, чей он сосед.

*Пример 4.*

*«Завтра Ваня пойдет либо в театр, либо в музей.»*  
(3.4)

Перевод высказывания (3.4) на язык логики:

$T \vee M$  (3.4')

Заметим, что можно обойтись обычной дизъюнкцией, но тогда соответствующая логическая формула становится более громоздкой:

$(T \wedge \neg M) \vee (\neg T \wedge M)$  (3.4'')

Здесь Т: «Завтра Ваня пойдет в театр»,

М: «Завтра Ваня пойдет в музей».

#### **4. Таблицы истинности для логических операций.**

##### **Конъюнкция, дизъюнкция, отрицание**

###### ***Конъюнкция***

А	В	А∧В
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Итак, если хотя бы одно из двух высказываний А, В ложно, то их конъюнкция ложна. Если же оба высказывания А, В истинны, то истинна и их конъюнкция. Такое определение вполне соответствует употреблению союза «и» в естественном языке.

### *Дизъюнкция*

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Представленная таблица истинности для дизъюнкции также превосходно согласуется с употреблением в естественном языке неразделительного союза «или».

### *Отрицание*

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Итак, *при любых обстоятельствах* исходное высказывание A и его отрицание  $\neg A$  должны иметь противоположные значения истинности. Приведем пример, поясняющий сказанное.

*Пример.*

A: «Петя кушает кашу».

Возможные способы отрицания:

а) Универсальный способ, всегда приводящий к правильному результату:

$\neg A$ : «**Неверно, что** Петя кушает кашу».

б) Постановка частицы «не» перед сказуемым (этот способ не всегда приводит к правильному результату):

$\neg A$ : «Петя **не** кушает кашу».

**Замечание.** Попробуем в предыдущем примере поставить частицу «не» иначе, чем это сделано в пункте б) (т.е. не перед сказуемым). Например,

B: «Петя кушает **не** кашу».

Высказывание В не является отрицанием для А, так как в принципе возможна ситуация, когда «Петя ничего не кушает»; в этом случае, очевидно

$$A = B = Л,$$

тем самым  $B \neq \neg A$ .

**Замечание.** Покажем, что постановка частицы «не» перед сказуемым не всегда приводит к правильной формулировке отрицания.

Рассмотрим высказывание:

С: «Некоторые люди боятся мышей».

С': «Некоторые люди не боятся мышей».

Итак, мы поставили частицу «не» перед сказуемым, но очевидно, что

$C' \neq \neg C$  (поскольку оба высказывания – С и С' – как известно, истинны).

В дальнейшем мы более подробно обсудим возникшую здесь ситуацию.

## 5. Таблицы истинности

для логических операций (продолжение).

**Импликация и эквиваленция. Строгая дизъюнкция**

*Импликация*

А	В	$A \rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Импликация – наиболее трудная для усвоения и восприятия логическая операция (и при этом, возможно, наиболее важная). Обсудим возникающие здесь проблемы.

**Замечание 1.** Рассмотрим вначале первую строчку таблицы. Пусть

А: *«Париж – столица Франции»*

В: *«В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы»*

Очевидно, что  $A = B = И$ , поэтому истинно также высказывание  $A \rightarrow B$ :

$$A \rightarrow B = И$$

Прочтем теперь высказывание  $A \rightarrow B$  на естественном языке:

*«Если Париж – столица Франции, то в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы»* (5.1)

Высказывание (5.1) истинно, но оно ни в коем случае не является доказательством теоремы Пифагора. Дело обстоит как раз наоборот: так как мы знаем, что теорема Пифагора верна, то мы можем (в соответствии с таблицей истинности для импликации) заключить, что высказывание (5.1) истинно.

**Замечание 2.** Вторая строчка таблицы не вызывает сомнений. Поэтому перейдем к объяснению третьей и четвертой строчек нашей таблицы.

Рассмотрим высказывание:

С: *«Если число страниц в моей книге больше пятисот, то оно больше трехсот.»*

Мы воспринимаем это утверждение как истинное вообще, независимо от того, сколько страниц в моей книге. Очевидно, что логическая структура высказывания С имеет вид:

$$C = A \rightarrow B, \quad (5.2)$$

где

А: «Число страниц в моей книге больше пятисот»,

В: «Число страниц в моей книге больше трехсот».

Обозначим реальное число страниц в моей книге через  $w$ .

Если  $w > 500$ , то (5.2) имеет вид

$$C = I \rightarrow I,$$

т.е. мы попадаем в первую строчку нашей таблицы, и истинность высказывания  $C$  (которая нам казалась естественной с самого начала) согласуется со значением  $I$ , стоящим в третьем столбце.

Пусть теперь  $300 < w \leq 500$ . В этом случае (5.2) приобретает вид

$$C = I \rightarrow L,$$

т.е. мы попадаем в третью строчку таблицы, и снова истинность  $C$  согласуется со значением  $I$ , стоящим в третьем столбце.

Аналогично, рассматривается случай  $w \leq 300$ . В этом случае (5.2) имеет вид

$$C = L \rightarrow L,$$

т.е. мы попадаем в четвертую строчку таблицы, и снова истинность  $C$  согласуется со значением  $I$ , стоящим в третьем столбце.

### Эквиваленция

А	В	$A \leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И



Представленная таблица истинности для эквиваленции вполне согласуется с употреблением в естественном языке союза «тогда и только тогда, когда...».

Приведем теперь таблицу истинности для строгой дизъюнкции (логического союза «либо..., либо»).

***Строгая дизъюнкция («либо..., либо»)***

A	B	$A \vee B$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

**Замечание.** Определяя действие логических союзов, мы воспользовались таблицами, которые, в сущности, представляют собой краткую запись словесного описания. Если мы захотим прочесть вслух любую из этих таблиц, то неизбежно воспользуемся в нашей речи теми логическими союзами, которым даем определение. Вернемся, например, к таблице, определяющей импликацию, и попробуем прочесть ее первую строчку. Вот, что у нас получится:

**Если  $A = \text{И}$  и  $B = \text{И}$ , то  $A \supset B = \text{И}$ .**

Здесь подчеркнуты и выделены жирным шрифтом логические союзы естественного языка («если..., то», «и»), которые мы фактически использовали, чтобы определить логический союз «и» языка логики. Для того, чтобы избавиться от неизбежно возникающего здесь порочного круга, в математике принято различать *язык логики* и *метаязык*, т.е. естественный язык, на котором комментируются высказывания, сделанные на языке логики.

## 6. Важнейшие формулы, связывающие между собой логические операции

**Определение 6.1.** Составные высказывания  $F(A, B, C, \dots)$  и  $G(A, B, C, \dots)$  называются *равносильными*, если они принимают одинаковые истинностные значения при любых предположениях относительно истинности входящих в них простых высказываний  $A, B, C, \dots$ . Равносильность двух составных высказываний обозначается при помощи значка  $\equiv$ .

Справедливы соотношения:

$$A \wedge I \equiv A, \quad (6.1)$$

$$A \wedge I \equiv I, \quad (6.2)$$

$$A \wedge A \equiv A, \quad (6.3)$$

$$A \vee I \equiv I, \quad (6.4)$$

$$A \vee I \equiv A, \quad (6.5)$$

$$A \vee A \equiv A, \quad (6.6)$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \text{ (коммутативность) } \quad (6.7)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \text{ (ассоциативность) } \quad (6.8)$$

$$A \vee B \equiv B \vee A, \text{ (коммутативность) } \quad (6.9)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), \text{ (ассоциативность) } \quad (6.10)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C), \text{ (дистрибутивность) } \quad (6.11)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C), \text{ (дистрибутивность) } \quad (6.12)$$

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A, \text{ (1-й закон поглощения) } \quad (6.13)$$

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A, \text{ (2-й закон поглощения) } \quad (6.14)$$

$$\neg(\neg A) \equiv A, \text{ (снятие двойного отрицания) } \quad (6.15)$$

$$A \wedge \neg A \equiv I, \text{ (закон противоречия) } \quad (6.16)$$

$$A \vee \neg A \equiv I, \text{ (закон исключенного третьего) } \quad (6.17)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \text{ (1-й закон де Моргана)} \quad (6.18)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \text{ (2-й закон де Моргана)} \quad (6.19)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B, \quad (6.20)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A, \text{ (закон контрапозиции)} \quad (6.21)$$

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B, \quad (6.22)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A). \quad (6.23)$$

Все эти формулы легко доказываются перебором вариантов при помощи соответствующих таблиц истинности.

**Замечание.** Подчеркнем, что в формулах (6.1)–(6.23) высказывания  $A$ ,  $B$ ,  $C$  могут принимать значения «И» или «Л» независимо друг от друга в любых комбинациях. Фактически,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в этих формулах играют роль *высказывательных переменных*.

**Замечание.** Обратим внимание на сходство этих формул с тождествами, изученными в гл.1. Это сходство не случайно и фактически основано на том, что при определении операций над множествами были неявно использованы логические операции. А именно, при определении пересечения множеств неявно использовалась конъюнкция высказываний, при определении объединения множеств – неявно использовалась дизъюнкция высказываний, при определении дополнения множества неявно использовалось отрицание высказывания.

## 7. Геометрическая интерпретация закона контрапозиции

Рассмотрим импликацию  $A \rightarrow B$  и попробуем дать геометрическую интерпретацию закону контрапозиции:

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A. \quad (7.1)$$

Идея состоит в том, чтобы с помощью геометрических рассуждений показать, что импликация  $A \rightarrow B$  истинна тогда и только тогда, когда истинна импликация  $\neg B \rightarrow \neg A$ .

Прежде всего, заметим, что для упорядоченной пары высказывательных переменных  $(A, B)$  существуют четыре различные возможности распределения их значений:

$$I - (И, И); \quad II - (И, Л); \quad III - (Л, И); \quad IV - (Л, Л). \quad (7.2)$$

Изобразим все эти четыре возможности на рис. 7.1. При этом будем для простоты предполагать, что высказывания  $A$  и  $B$  зависят от параметра  $x$ , значения которого заполняют прямоугольник  $U$ . Нарисуем внутри этого прямоугольника два круга  $A_n, B_n$  (см. рис. 7.1) и будем считать, что

$$\begin{aligned} A(x) &= И \text{ при } x \in A_n, \quad A(x) = Л \text{ при } x \in (A_n)', \\ B(x) &= И \text{ при } x \in B_n, \quad B(x) = Л \text{ при } x \in (B_n)'. \end{aligned} \quad (7.3)$$

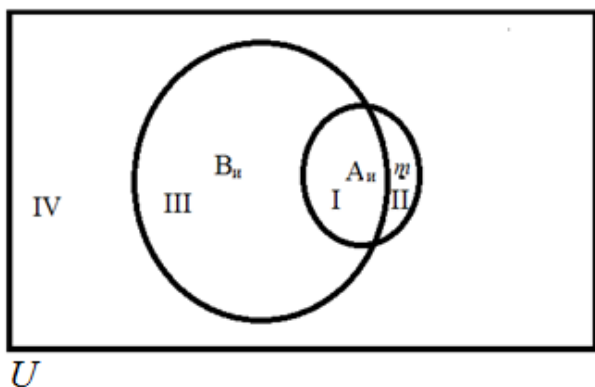


Рис. 7.1

Нетрудно видеть, что области I–IV в точности соответствуют четырем случаям, перечисленным в (7.2).

Ясно также, что если мы хотим, чтобы наш рисунок адекватно моделировал истинность импликации  $A \rightarrow B$ , то

области  $\Pi$  на нем не должно быть. Действительно, в точке  $m$  имеем  $A(m) = \text{И}$ ,  $B(m) = \text{Л}$ , откуда  $A(m) \rightarrow B(m) = \text{Л}$ .

Исправим теперь наш рисунок, удалив область  $\Pi$  (см. рис. 7.2).

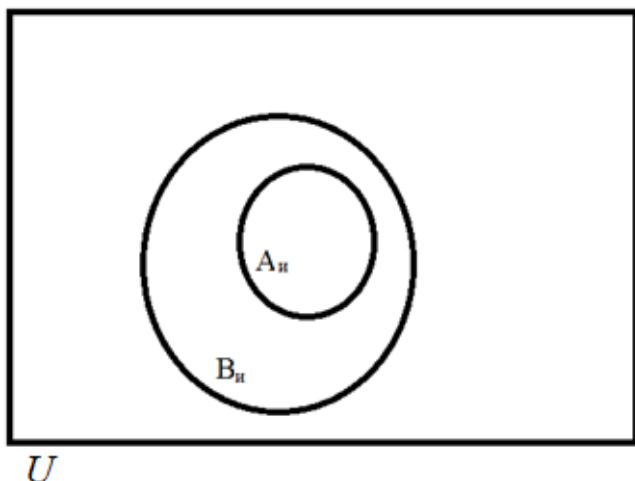


Рис. 7.2

Нетрудно видеть, что рис. 7.2 адекватно моделирует истинность импликации  $A \rightarrow B$ . Действительно, пусть  $x_0$  – произвольно взятая точка из круга  $A_{\text{И}}$ , тогда в силу того, что

$$A_{\text{И}} \subseteq B_{\text{И}}, \quad (7.4)$$

$x_0$  неизбежно принадлежит кругу  $B_{\text{И}}$ . Отсюда с учетом соглашений (7.3) легко следует истинность импликации  $A \rightarrow B$  при каждом  $x \in U$ .

Далее, геометрически очевидно, что включение множеств (7.4) эквивалентно следующему «обратному» включению их дополнений:

$$(B_{\text{И}})' \subseteq (A_{\text{И}})',$$

или, что то же самое,

$$(\neg B)_n \subseteq (\neg A)_n. \quad (7.5)$$

Здесь через  $(\neg B)_n$ ,  $(\neg A)_n$  обозначены множества всех тех  $x$ , при которых истинны  $\neg B(x)$  и  $\neg A(x)$  соответственно.

Однако из (7.5), в соответствии с соглашениями (7.3), аналогично предыдущему следует, что (при каждом  $x \in U$ ) истинна импликация

$$\neg B \rightarrow \neg A.$$

Итак, рассуждая чисто геометрически, мы вывели истинность импликации  $\neg B \rightarrow \neg A$  из истинности  $A \rightarrow B$ .

В обратную сторону рассуждения проводятся аналогично.

**Замечание о методе контрапозиции.** Предположим, что требуется доказать истинность утверждения  $B$ , причем известно, что истинно утверждение  $A$ . Предполагают, что истинно  $\neg B$ , и доказывают, что в этом случае истинно  $\neg A$ .

По закону контрапозиции отсюда следует истинность утверждения  $B$ .

## 8. Некоторые важнейшие схемы рассуждений

В традиционной (аристотелевской) логике вместо записи

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

используется запись:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline C \end{array} \quad (8.1)$$

При этом высказывания  $A$  и  $B$ , расположенные над чертой, называются *посылками* и считаются истинными, а высказывание  $C$ , расположенное под чертой, называется

*выводом.* Естественно хотеть, чтобы вывод из истинных посылок также получался истинным.

Ниже мы рассмотрим три важнейшие схемы вида (8.1), в которых истинность вывода гарантирована (при истинных посылках).

### **Modus ponens (утверждающий модус)**

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{A} \\ B \end{array} \quad (8.2)$$

Истинность вывода (при истинных посылках) очевидным образом следует из таблицы истинности для импликации. Заметим, что истинность вывода в (8.2) можно также «непосредственно увидеть» на рис. 7.2.

### **Modus tollens (отрицающий модус)**

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{\neg B} \\ \neg A \end{array} \quad (8.3)$$

Как и в случае схемы (8.2), истинность вывода в (8.3) сразу следует из таблицы истинности для импликации. См. также рис. 7.2. (В сущности, (8.3) представляет собой следствие из закона контрапозиции.)

### **Закон силлогизма**

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{B \rightarrow C} \\ A \rightarrow C \end{array} \quad (8.4)$$

Проверяется по таблицам истинности. См. также рис. 8.1, где  $C_{\text{и}}$  – круг, внутри которого  $C = И$ , а вне которого  $C = Л$ .

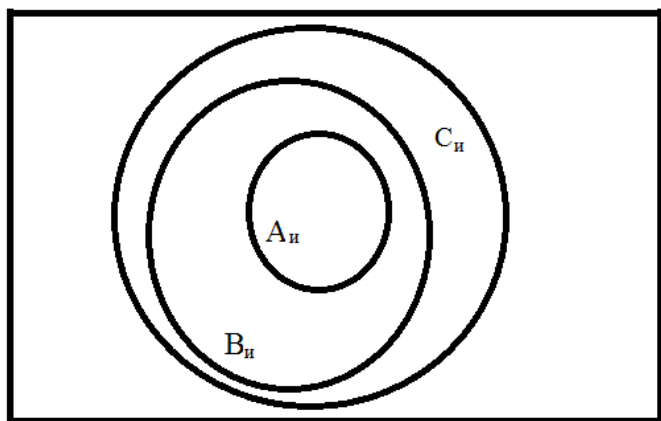


Рис. 8.1

### Исключение строгой дизъюнкции

$$A \vee B$$

$$\neg B$$

$$A$$

Проверяется по таблице истинности для строгой дизъюнкции.

## 9. Предикаты: определение, примеры

**Определение 9.1.** *Одноместным предикатом  $A(x)$  называется повествовательное предложение, содержащее одну переменную  $x$  и превращающееся в высказывание при подстановке вместо этой переменной ее конкретных значений. (Для обозначения переменной, входящей в предикат, может использоваться любая буква латинского или русского алфавита.)*

**Определение 9.2.** Множество всех тех значений переменной  $x$ , при подстановке которых в предикат  $A(x)$  полу-



чается (осмысленное) высказывание, называется *областью определения* данного предиката.

**Определение 9.3.** Множество всех тех значений переменной  $x$ , при подстановке которых в предикат  $A(x)$  получается истинное высказывание, называется *множеством истинности* данного предиката и обозначается  $A_{\text{и}}$ .

**Определение 9.4.** Если множество истинности предиката  $A(x)$  совпадает с областью его определения, то такой предикат называют *тождественно истинным* и пишут  $A(x) \equiv \text{И}$ .

Если множество истинности предиката  $A(x)$  пусто, то такой предикат называют *тождественно ложным* и пишут  $A(x) \equiv \text{Л}$ .

**Определение 9.5.** Два предиката  $A(x)$  и  $B(x)$ , у которых множества истинности совпадают, мы будем называть *эквивалентными* и писать

$$A(x) \equiv B(x).$$

*Пример.*

«Писатель  $x$  написал роман “Война и мир”». Область определения этого предиката – множество всех писателей. Множество истинности этого предиката состоит из Л.Н. Толстого.

*Пример.*

$$A(x): \langle x + x = 3 - x \rangle.$$

Это уравнение – одноместный (а не трехместный!) предикат. Его область определения – множество всех действительных чисел, а его множество истинности есть  $\{1\}$ .

*Пример.*

$$B(y): \langle (y - 1)(y - 2) = 0 \rangle.$$

Это уравнение – также одноместный предикат, его область определения – множество всех действительных чисел, а его множество истинности есть  $\{1; 2\}$ .

*Пример.*

$C(z)$ : « $1 + z = z + 1$ ».

$C(z)$  – тождественно истинный предикат.

## 10. Операции над предикатами

Пусть

$$A(x), B(x), C(x), \dots \quad (10.1)$$

– одноместные предикаты. Логические операции над ними определяются при каждом фиксированном  $x$ , как над высказываниями. Поэтому все законы (6.1) – (6.23) сохраняют свою силу и для предикатов.

## 11. Множества истинности операций над предикатами

Обозначим через  $A_{\text{и}}$ ,  $B_{\text{и}}$  множества истинности предикатов  $A(x)$ ,  $B(x)$  соответственно.

Нас будут интересовать множества истинности операций над этими предикатами.

Несложно показать при помощи рассуждений, что

$$[A(x) \wedge B(x)]_{\text{и}} = A_{\text{и}} \cap B_{\text{и}}, \quad (11.1)$$

$$[A(x) \vee B(x)]_{\text{и}} = A_{\text{и}} \cup B_{\text{и}}, \quad (11.2)$$

$$[\neg A(x)]_{\text{и}} = (A_{\text{и}})', \quad (11.3)$$

$$[A(x) \rightarrow B(x)]_{\text{и}} = [\neg A(x) \vee B(x)]_{\text{и}} = (A_{\text{и}})' \cup B_{\text{и}}. \quad (11.4)$$

## 12. Логическое следование предикатов

**Определение 12.1.** Пусть  $A(x)$  и  $B(x)$  – два предиката с общей областью определения. Если

$$A(x) \rightarrow B(x) \equiv I, \quad (12.1)$$

то говорят, что  $B(x)$  логически следует из  $A(x)$ .

**Теорема 12.1.** Предикат  $B(x)$  логически следует из предиката  $A(x)$  в том и только том случае, если выполнено включение множеств истинности:

$$A_{\text{и}} \subseteq B_{\text{и}}. \quad (12.2)$$

**Доказательство.** См. рис. 7.1 и 7.2.

**Замечание.** Если выполнено соотношение (12.1), то говорят, что  $A(x)$  является достаточным условием для  $B(x)$ , а  $B(x)$  является необходимым условием для  $A(x)$ .

**Замечание.** Если

$$A(x) \leftrightarrow B(x) \equiv I, \quad (12.3)$$

то, очевидно,

$$A_{\text{и}} = B_{\text{и}}. \quad (12.4)$$

В этом случае говорят, что каждый из предикатов  $A(x)$ ,  $B(x)$  является необходимым и достаточным условием для другого.

## 13. Квантор общности

Для определенности, будем в этом разделе говорить об одноместных предикатах, зависящих от переменной  $x$ ; областью определения рассматриваемых предикатов считаем множество  $X$ .

**Определение 13.1.** Квантором общности называют выражение

$$\langle\langle \text{для каждого } x \rangle\rangle \quad (13.1)$$

– это краткая форма записи; либо выражение

$$\text{«для каждого } x \in X\text{»} \quad (13.1')$$

– это подробная форма записи.

Для обозначения квантора общности используют специальный значок – перевернутую букву А (от английского слова *all*). В результате краткая запись приобретает вид:  $(\forall x)$ , а подробная запись – вид:  $(\forall x \in X)$ .

**Замечание.** Синонимами выражения (13.1) являются следующие словосочетания: «для всех  $x$ », «для любого  $x$ », «для всякого  $x$ ». Аналогичное замечание справедливо и для выражения (13.1').

Пусть теперь  $P(x)$  – некоторый предикат; *постановка квантора общности перед ним превращает его в высказывание*

$$(\forall x)P(x) \quad (13.2)$$

или, в подробной записи,

$$(\forall x \in X)P(x). \quad (13.2')$$

**Замечание.** Говорят, что квантор  $(\forall x)$  *связывает* переменную  $x$ ; в выражениях (13.2) и (13.2') переменная  $x$  считается *связанной* (до постановки квантора  $(\forall x)$  эта же переменная была *свободной*).

*Пример.* Рассмотрим высказывание на естественном языке:

С: «Каждый человек носит шляпу».

Логическая структура этого предложения такова:

$$(\forall x \in X)P(x);$$

здесь  $X$  – множество всех людей,  $P(x)$  – предикат « $x$  носит шляпу».

Нетрудно понять, что высказывание С ложно (т.к. существуют люди, которые не носят шляпу).

## 14. Квантор существования

**Определение 14.1.** *Квантором существования* называют выражение

$$\text{«существует } x \text{ такой, что»} \quad (14.1)$$

– это краткая форма записи; либо выражение

$$\text{«существует } x \in X \text{ такой, что»} \quad (14.1')$$

– это подробная форма записи.

**Замечание.** В естественном языке роль квантора существования выполняют также словосочетания: «найдется  $x$  такой, что», «для некоторых  $x$ ».

Для обозначения квантора существования используют специальный значок – отраженную по горизонтали букву  $E$  (от английского слова *exist*). В результате краткая запись приобретает вид:  $(\exists x)$ , а подробная запись – вид:  $(\exists x \in X)$ .

Квантор существования (как и квантор общности) связывает соответствующую переменную и превращает предикат в высказывание.

*Пример.* Рассмотрим высказывание:

$D$ : «У некоторых людей четырнадцать ног».

Логическая структура этого предложения такова:

$$(\exists x \in X)Q(x);$$

здесь  $X$  – множество всех людей,  $Q(x)$  – предикат « $x$  имеет четырнадцать ног».

Высказывание  $D$ , очевидно, ложно, так как не существует ни одного человека с 14-ю ногами.

## 15. Отрицание высказываний с кванторами

Общее правило отрицания высказываний с кванторами выглядит так:

*квантор заменяется на противоположный, а отрицание переносится на предикат.*

А именно:

$$\neg(\forall x \in X)P(x) = (\exists x \in X)\neg P(x); \quad (15.1)$$

$$\neg(\exists x \in X)Q(x) = (\forall x \in X)\neg Q(x). \quad (15.2)$$

Можно показать, что соотношения (15.1) и (15.2) представляют собой обобщение соответствующих законов де Моргана. (Действительно, квантор общности является, очевидно, обобщением конъюнкции, а квантор существования – обобщением дизъюнкции.)

**Замечание.** Если высказывание содержит квантор – важно, какой ( $\forall$  или  $\exists$ ) – постановка частицы «не» перед сказуемым уже не приводит к правильной формулировке отрицания.

*Пример.*

А: «Каждый первоклассник умеет читать.»

Очевидно, что высказывание «Каждый первоклассник не умеет читать» не является отрицанием высказывания А, т.к. оба эти высказывания, очевидно, ложны.

*Пример.*

В: «Некоторые первоклассники умеют читать.»

Очевидно, что высказывание «Некоторые первоклассники не умеют читать» не является отрицанием высказывания В, т.к. оба эти высказывания, очевидно, истинны.

**Задачи.** Построить отрицания следующих высказываний двумя разными способами:

*а) Каждый взрослый человек пьет утром кофе или кефир.*

*б) Сдать экзамен по математике может каждый ученик.*

*в) Иногда лучше жевать, чем говорить.*

*г) Неверно, что всякий человек может выучиться на агронома.*

*д) При встрече с бульдогами Мурзика всегда охватывал ужас.*

*е) Петра Петровича любой может обыграть и в шашки, и в шахматы.*

*ж) Везде развешаны воздушные шары или елочные игрушки.*

*з) Кое-кто обрадовался приходу весны.*

*и) Егора никто не встретил на вокзале.*

*к) Никто никогда не может предсказать свою собственную судьбу.*

*л) Кое-кто кое-где у нас порой забывает, сколько будет дважды два.*

## **16. Кванторы и многоместные предикаты**

Прежде всего, подчеркнем, что «местность» предиката определяется не числом мест в предложении, где встречается переменная  $x$ , а числом переменных, встречающихся в предложении.

Для простоты мы ограничимся здесь рассмотрением двуместных предикатов.

Итак, пусть  $A(x, z)$  – некоторый двуместный предикат. Переменные  $x$  и  $z$  не обязаны пробегать одно и то же множество; будем считать, что обе эти переменные изменяются

независимо друг от друга, причем  $x \in X$ , а  $z \in Z$  (здесь  $X$  и  $Z$  – некоторые множества).

Для того, чтобы наш предикат  $A(x, z)$  превратился в высказывание, нам нужно придать переменным  $x$  и  $z$  некоторые конкретные значения  $x_0$  и  $z_0$ . При этом высказывание  $A(x_0, z_0)$  может оказаться как истинным, так и ложным. Совокупность всех таких упорядоченных пар вида  $(x_0, z_0)$ , что

$$A(x_0, z_0) = \text{И},$$

очевидно, будет представлять собой множество истинности предиката  $A(x, z)$ . (Это множество является подмножеством декартова произведения  $X \times Z$ .)

Сейчас нас будет интересовать открывшаяся перед нами возможность изучения действия кванторов не по одному, а по двум переменным, когда кванторы, действующие по каждому из переменных, могут (но не обязаны) быть разными.

Рассмотрим все четыре имеющиеся здесь варианта.

1)  $(\forall x \in X)(\forall z \in Z)A(x, z)$  – читается так:

*«для любых  $x$  из  $X$  и  $z$  из  $Z$   $A(x, z)$ »;*

возможен и такой способ прочтения:

*«для любых  $x$  из  $X$  и  $z$  из  $Z$  справедливо, что  $A(x, z)$ ».*

2)  $(\forall x \in X)(\exists z \in Z)A(x, z)$

– читается так:

*«для каждого  $x$  из  $X$  найдется такое (зависящее от  $x$ )  $z$  из  $Z$ , что  $A(x, z)$ ».*

3)  $(\exists x \in X)(\forall z \in Z)A(x, z)$

– читается так:

*«существует такое  $x$  из  $X$ , что для каждого  $z$  из  $Z$   $A(x, z)$ »;*



возможен вариант прочтения:

*«существует такое  $x$  из  $X$ , что для каждого  $z$  из  $Z$  верно, что  $A(x, z)$ ».*

$$4) (\exists x \in X)(\exists z \in Z)A(x, z)$$

– читается так:

*«существуют такие  $x$  из  $X$  и  $z$  из  $Z$ , что  $A(x, z)$ ».*

**Замечание.** Как уже говорилось выше, словосочетания «для любого», «для каждого», «для всякого» – это синонимы.

Точно так же синонимами являются слова и словосочетания «существует», «найдется», «для некоторого».

**Задачи.** Записать словами следующие утверждения и определить их истинностное значение (ниже  $N$  обозначает множество натуральных чисел):

$$16.1. (\forall n \in N)(\forall m \in N)m > n.$$

$$!6.2. (\forall n \in N)(\exists m \in N)m > n.$$

$$16.3. (\exists n \in N)(\forall m \in N)m > n.$$

$$16.4. (\exists n \in N)(\exists m \in N)m > n.$$

16.5. Построить отрицания высказываний 16.1–16.4 и записать каждое из них в виде формулы двумя способами.

**Указание.** Правило построения отрицания высказываний, содержащих несколько кванторов, ничем не отличается от соответствующего правила для высказываний, содержащих один квантор. А именно: каждый квантор существования заменяется на квантор общности и, наоборот, каждый квантор общности заменяется на квантор существования, а предикат заменяется на свое отрицание.

16.6. Верно ли, что высказывания

$$(\forall x \in X)(\exists z \in Z)A(x, z) \text{ и } (\exists x \in X)(\forall z \in Z)A(x, z)$$

всегда имеют одно и то же истинностное значение?

## 17. Проверка правильности формы умозаключения на диаграммах Эйлера – Венна

Наконец мы подошли к самому важному и полезному пункту нашего изложения.

**Определение 17.1.** *Умозаключение (рассуждение)* – это логическое действие, позволяющее получать новое знание из уже имеющегося.

Фактически, умозаключение представляет собой импликацию вида

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B, \quad (17.1)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – связанные между собой по смыслу высказывания, называемые *посылками*, а  $B$  – высказывание, называемое *выводом*.

**Определение 17.2.** Говорят, что умозаключение обладает *правильной формой*, если при любых предположениях об объемах понятий, используемых в посылках, из истинности посылок следует истинность вывода.

**Пример1** (иллюстрация к закону контрапозиции для предикатов).

Если лягушка квакает, то она довольна собой.

Если лягушка недовольна собой, то она не квакает. (17.2)

В этом примере у нас имеется одна-единственная посылка: «Если лягушка квакает, то она довольна собой».

«На языке предикатов и кванторов» умозаключение (17.2) запишется в виде

$$[(\forall x \in L) K(x) \rightarrow D(x)] \rightarrow [(\forall x \in L) \neg D(x) \rightarrow \neg K(x)], \quad (17.2')$$

здесь  $L$  – множество лягушек,  $K(x)$  – «лягушка  $x$  квакает»,  $D(x)$  – «лягушка  $x$  довольна собой».

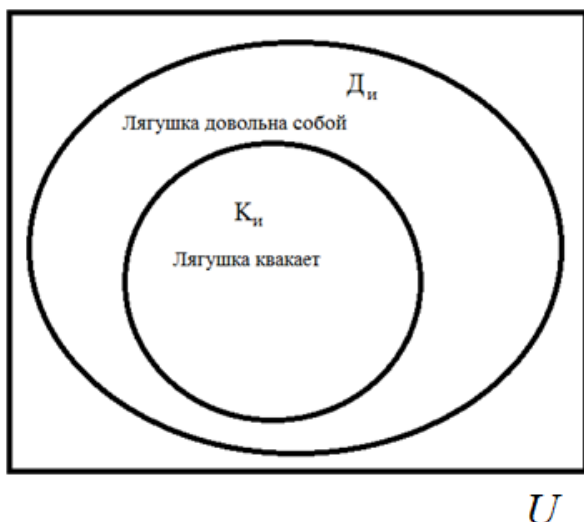


Рис. 17.1

Истинность посылки, очевидно, означает, что для множеств истинности предикатов  $K(x)$  и  $D(x)$  должно быть выполнено включение

$$K_n \subseteq D_n$$

(см. по этому поводу также п. 7). Однако из этого включения немедленно следует «обратное» включение для дополнений к соответствующим множествам истинности:

$$(D_n)' \subseteq (K_n)',$$

откуда, в свою очередь, следует истинность вывода в (17.2) (см. рис. 17.1).

**Замечание.** Умозакключение (17.2), очевидно, можно было бы переписать также «на языке множеств»:

$$\underline{K_n} \subseteq \underline{D_n} \quad (17.2'')$$

$$(D_n)' \subseteq (K_n)'$$

### **Пример 2.**

*Некоторые розы – красные*

*Ни одна собака не красная*

*Ни один фокстерьер не красный* (17.3)

*Фокстерьеры – это собаки*

Мы предоставляем читателю возможность переписать (17.3) «на языке предикатов и кванторов», а вместо этого запишем это умозаключение сразу в менее громоздком виде «на языке множеств»:

$$\begin{aligned} P_{\text{и}} \cap K_{\text{и}} &\neq \emptyset \\ C_{\text{и}} &\subseteq (K_{\text{и}})' \\ \underline{\Phi_{\text{и}} \subseteq (K_{\text{и}})'} \\ \Phi_{\text{и}} &\subseteq C_{\text{и}}. \end{aligned} \quad (17.3')$$

Здесь  $P_{\text{и}}$  – множество роз (т.е. множество истинности предиката « $x$  – роза»);

$K_{\text{и}}$  – множество красных объектов (т.е. множество истинности предиката « $x$  – красный»);

$C_{\text{и}}$  – множество собак (т.е. множество истинности предиката « $x$  – собака»);

$\Phi_{\text{и}}$  – множество фокстерьеров (т.е. множество истинности предиката « $x$  – фокстерьер»).

Все посылки нашего умозаключения (17.3), а также его вывод – истинны. Но правильна ли форма этого умозаключения? Для того чтобы получить ответ на этот вопрос, посмотрим на рис. 17.2.

Мы видим, что все требования, которые обеспечивают истинность посылок в (17.3'), соблюдены на рис. 17.2, но ожидаемого вывода мы не получили. Это как раз и означает, что форма нашего умозаключения – неправильная.

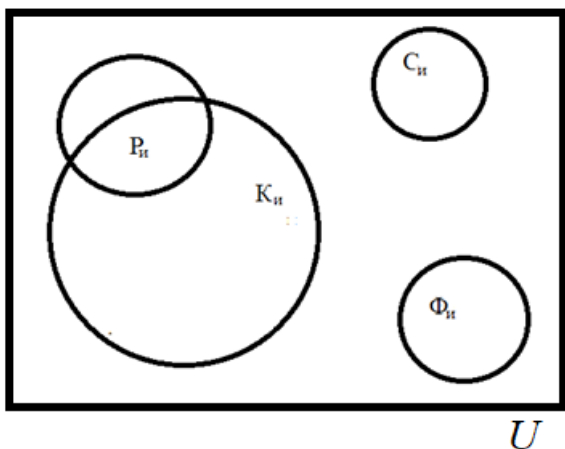


Рис. 17.2

**Пример 3.**

*Ни одна кукушка не умеет читать*

*Некоторые утки умеют плавать*

*Некоторые утки – не кукушки* (17.4)

Сразу же перепишем умозаключение (17.4) «на языке множеств»:

$$\begin{aligned}
 K_n &\subseteq (C_n)' \\
 \underline{Y_n \cap \Pi_n \neq \emptyset} \\
 Y_n \cap (K_n)' &\neq \emptyset. \quad (17.4')
 \end{aligned}$$

Здесь  $K_n$  – множество кукушек;  $C_n$  – множество существ, умеющих читать;

$Y_n$  – множество уток;  $\Pi_n$  – множество существ, умеющих плавать.

Снова посылки и вывод – истинные высказывания, но, как видно из рис. 17.3, истинность посылок не обеспечивает истинность вывода. Поэтому форма умозаключения (17.4) – неправильная.

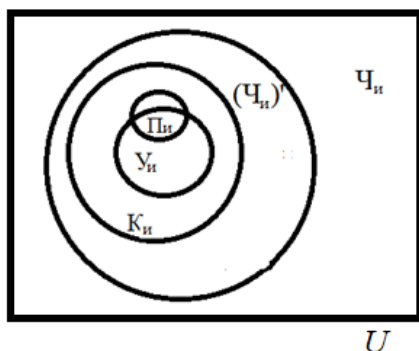


Рис. 17.3

В следующих трех задачах в качестве универсального множества  $U$  рассматривается множество всех супружеских пар.

**Задача 1.** Является ли правильной форма следующего умозаключения?

- (а) Если мужчина носит шляпу, то он носит очки;
- (б) Если женщина носит шляпу, то она носит очки;
- (в) Иван Петрович носит шляпу  
Жена Ивана Петровича носит очки

**Указание.** См. рис. 17.4, где каждая точка внутри прямоугольника изображает супружескую пару {муж, жена}.

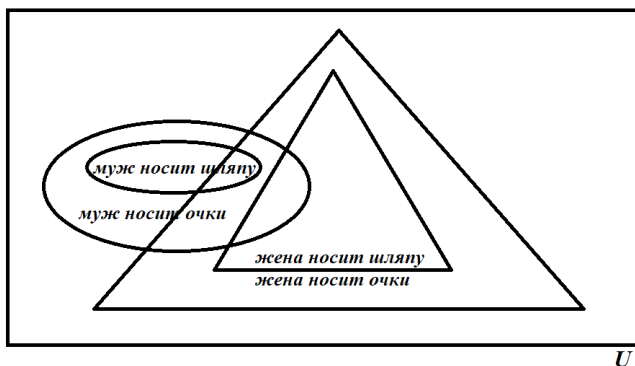


Рис. 17.4

**Задача 2.** Является ли правильной форма следующего умозаключения?

*(а)Если мужчина носит шляпу, то он носит очки;*

*(б)Если мужчина носит шляпу, то его жена носит очки;*

*(в)Иван Петрович носит очки*

*Жена Ивана Петровича носит очки*

**Указание.** См. рис.17.5, где каждая точка внутри прямоугольника изображает супружескую пару {муж, жена}.

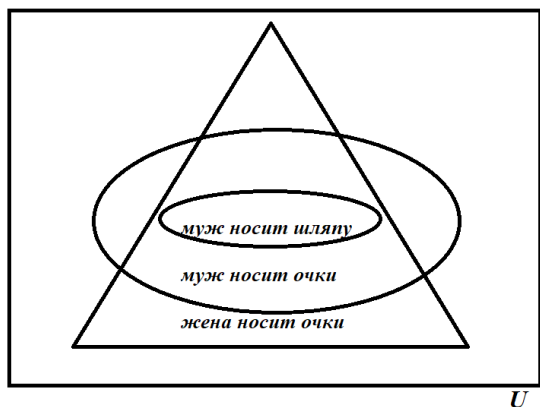


Рис. 17.5

**Задача 3.** Является ли правильной форма следующего умозаключения?

*(а)Если мужчина носит шляпу, то он носит очки;*

*(б)Если мужчина носит очки, то его жена носит очки или в Дальнем Космосе есть жизнь;*

*(в)Иван Петрович носит шляпу;*

*(г)Жена Ивана Петровича не носит очки*

*В Дальнем Космосе есть жизнь*

## 18. Проверка правильности формы умозаключения на диаграммах Эйлера – Венна (продолжение)

Здесь мы расширим область применения метода, представленного в п. 17. Заметим, прежде всего, что во всех примерах, рассмотренных в п.17, естественным образом возникало универсальное множество  $U$ , составленное из объектов, к которым относились все посылки (а также вывод). В примере 1 из п.17 универсальное множество состояло из всевозможных лягушек, в примере 2 – из всевозможных животных и растений, в примере 3 – из всевозможных птиц.

Но как быть, если все посылки (и вывод) относятся к единичным, уникальным объектам и не образованы из предикатов с помощью квантора существования или квантора общности? В этом случае у нас, на первый взгляд, «нет материала», из которого можно было бы создавать универсальное множество, и проверка правильности формы умозаключения на диаграмме Эйлера – Венна кажется невозможной.

Рассмотрим следующий

**Пример 1** (см. [2], с. 51).

$$X \rightarrow (Y \vee Z)$$

$$\neg Y \vee Z$$

$$(X \wedge Y) \vee Z \quad (18.1)$$

Оперируя таблицами истинности (и пользуясь для упрощения рассуждений методом «от противного»), И.Л. Никольская устанавливает, что форма данного рассуждения – неправильная.



Попробуем сделать этот вывод более наглядным и положим, для определенности, что:

$X$  = «Солнце всходит на востоке»,

$Y$  = «Вася в шляпе»,

$Z$  = «Вася в очках».

Сделаем теперь основной шаг, ведущий нас к цели – изображению формы рассуждения (18.1) на диаграмме Эйлера – Венна.

А именно, будем считать, что мы находимся в «Мульти-Вселенной», причем в каждом из миров есть свое Солнце, свой восток, свой Вася и т.д. ***При этом каждому фиксированному набору истинностных значений высказывательных переменных  $X, Y, Z$  сопоставим по крайней мере одну Вселенную.***

Изобразим теперь Универсальное множество для задачи (18.1) в виде прямоугольника, внутри которого каждую точку будем понимать как одну из множества Вселенных.

**Замечание.** Прежде чем двигаться дальше, обратим внимание читателя на следующее обстоятельство. Введя в рассмотрение Мульти-Вселенную, мы обязаны отразить этот факт в способе прочтения умозаключения (18.1). А именно, теперь (18.1) следует читать так:

*Для любой Вселенной верно, что если Солнце встает на востоке, то Вася в шляпе или Вася в очках;*

*Для любой Вселенной верно, что Вася не в шляпе или Вася в очках*

*Для любой Вселенной верно, что (Солнце всходит на востоке и Вася в шляпе) или Вася в очках* (18.2)

Подчеркнем, что фактически никакой разницы между (18.1) и (18.2) нет.

Это соображение применимо и в более общем случае.

А именно, верно

**Утверждение.** *Если в умозаключении вида (18.1) при любых истинностных значениях высказывательных переменных, сохраняющих истинность посылок, вывод истинен, то в каждой из соответствующих Вселенных, входящих в Мульти-Вселенную, вывод, очевидно, также будет истинным. Если же для умозаключения вида (18.1) найдется такое распределение истинностных значений высказывательных переменных, при котором посылки истинны, а вывод ложен, то в силу нашего построения найдется и Вселенная, в которой соответствующие посылки истинны, а вывод – ложен.*

Перейдем теперь к изображению рассуждения (18.2) на диаграмме Эйлера – Венна.

Пусть маленький круг ограничивает те Вселенные, где «Вася в шляпе», а большой круг заключает в себе все те Вселенные, в которых «Вася в очках». Из истинности второй посылки ясно, что большой круг должен содержать малый внутри себя.

Наконец, пусть вытянутый овал (закрашенный черным цветом) заключает внутри себя все те Вселенные, где «Солнце всходит на востоке». (См. рис. 18.1).

Нетрудно видеть (см. рис. 18.1), что вне большого круга всегда найдется Вселенная, в которой вывод нашего умозаключения ложен.

Тем самым, опираясь исключительно на рис. 18.1, мы показали, что форма умозаключения (18.1) – **неправильная**.



$U$

Если Солнце всходит на востоке, то Вася в шляпе или в очках  
Вася не в шляпе или Вася в очках

(Солнце всходит на востоке и Вася в шляпе) или Вася в очках

Рис. 18.1

**Пример 2.** Формулировка предлагаемой ниже задачи также взята из [2], где предполагается исследование правильности формы умозаключения при помощи таблиц истинности.

(а) Если Петр поедет в Свердловск, то Иван поедет в Калугу

(б) Петр поедет в Свердловск или в Челябинск

(в) Если Петр поедет в Челябинск, то Анна останется в Москве

(г) Анна не останется в Москве

Иван поедет в Калугу

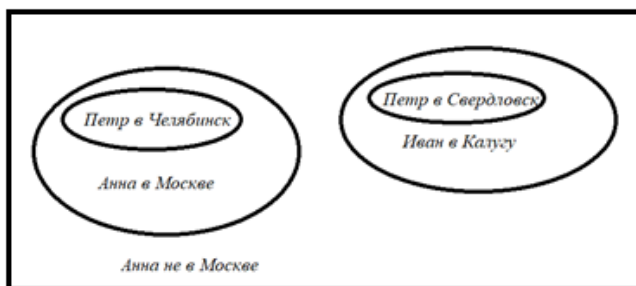


Рис. 18.2. Умозаключение правильной формы

Попробуем объяснить, почему из рис. 18.2 следует правильность формы соответствующего умозаключения (т.е. правомерность вывода о том, что Иван поедет в Калугу).

Действительно, всё, что содержится внутри овала «Анна в Москве», уничтожается посылкой «Но Анна не останется в Москве.» Для того, чтобы уничтожить (опровергнуть) вывод «Иван поедет в Калугу», очевидно, нужно овалом «Анна в Москве» полностью охватить овал «Иван в Калугу». Но в этом случае окажутся уничтоженными сразу *оба* овала «Петр в Челябинск» и «Петр в Свердловск», что противоречит второй посылке. Итак, геометрически очевидно, что опровергнуть вывод рассматриваемого умозаключения не удастся. Следовательно, его форма – правильная.

**Замечание.** Предложенный метод анализа правильности формы умозаключений особенно удобен в случае, когда нужно обосновать неправильность формы. В случае, когда предлагается обосновать правильность формы умозаключения, этот метод также может оказаться полезен, но пользоваться им труднее. В этом случае предложенный способ можно использовать для предварительной оценки ситуации, а затем, чтобы не ошибиться, проверить результат по таблицам истинности.

**Замечание.** Использование универсального множества  $U$ , состоящего из всевозможных Вселенных, очевидно, позволяет доказать на диаграммах Эйлера – Венна все логические равносильности (6.1) – (6.23).

**Задача.** Докажите с помощью диаграмм Эйлера – Венна равносильности:

$$A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C);$$

$$A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C).$$

## Добавление 1.

### *Причинное следование и закон контрапозиции [5]*

Ниже рассматривается парадоксальный аспект взаимодействия причинного следования с законом контрапозиции; кроме того, обсуждаются возможности исправления формально возникающих абсурдных высказываний.

Закон контрапозиции, как мы знаем, выглядит следующим образом:

Высказывание

*«Если А, то В»*

истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание

*«Если не В, то не А».*

В случае, когда мы имеем дело с обычным логическим следованием, этот закон действует безупречно и не порождает никаких проблем при переводе с языка (формальной) логики на естественный язык.

Например, равносильность высказываний

*«Если число страниц в моей книге делится на 9, то оно делится на 3»*

и

*«Если число страниц в моей книге не делится на 3, то оно не делится на 9»*

прекрасно согласуется с обычным здравым смыслом и не вызывает сомнений.

Ситуация не меняется, если высказывания сформулированы не в настоящем, а в будущем времени. Точно так же не вызывает сомнений равносильность высказываний:

*«Если число страниц в моей новой книге поделится на 9, то оно поделится на 3»*

и

*«Если число страниц в моей новой книге не поделится на 3, то оно не поделится на 9».*

Ситуация меняется, когда мы имеем дело не с чисто логическим, а с причинным следованием.

**Пример 1.** Рассмотрим предложение, которое внешне выглядит вполне безобидно:

*«Если купим игрушки, то украсим елку».* (1)

Формальное применение закона контрапозиции приводит нас к явной бессмыслице (если речь идет о елочных игрушках и о той же самой елке):

*«Если не украсим елку, то не купим игрушки».* (2)

Корень недоразумения в том, что в причинном следовании подразумевается, что причина возникает чуть-чуть раньше следствия, и это «чуть-чуть» играет (при попытке формально применить закон контрапозиции) решающую роль.

Г.Е. Горелик в частной беседе предложил примерно такой выход из положения. Нужно, применяя контрапозицию, превратить «будущее время» в «прошедшее в будущем». А именно:

*«Если елка не будет украшена, то это будет означать, что игрушки не были куплены».* (3)

При таком подходе смысл исходного высказывания передается, на первый взгляд, точно. Но только на первый взгляд! Действительно, игрушки могли купить, но елку просто-напросто не успели украсить. Таким образом, в случае причинного следования закон контрапозиции для высказываний, сформулированных в будущем времени, работает «со скрипом».

Можно попытаться усовершенствовать рассмотренный выше подход, предложив такую формулировку для контрапозиции исходного высказывания:

*«Если будет известно, что елка не была украшена, то это будет означать, что игрушки не были куплены».*  
(4)

Но даже такая формулировка привносит в высказывание смысл, которого там изначально не было. Мало ли, что могло случиться, произошла задержка, и елку не смогли вовремя украсить.

**Пример 2.** Тем не менее, если в исходную фразу включить ограничение по времени, предложенный прием позволяет построить точную контрапозицию, не искажающую смысла исходной фразы. Итак, возьмем в качестве исходной фразу:

*«Если купим игрушки, то до 30 декабря украсим елку».*  
(5)

Строим контрапозицию этого предложения при помощи способа, рассмотренного в Примере 1:

*«Если будет известно, что до 30 декабря елка не была украшена, то это будет означать, что игрушки не были куплены».*  
(6)

Рассмотрим еще один пример, в котором также присутствует ограничение по времени, но в неявном виде.

**Пример 3.** Исходное предложение:

*«Если сделаю уроки, то пойду на каток».*  
(7)

Строим контрапозицию, одновременно превращая «будущее время» в «прошедшее в будущем»:

*«Если окажется, что я не был на катке, то это будет означать, что я не сделал уроки».*  
(8)

Итак, построенная контрапозиция в данном примере не искажает смысла исходной фразы. Дело, на наш взгляд, именно в том, что в исходной фразе неявно предполагается,

что поход на каток намечается на самое ближайшее время, на «сегодня». Именно это ограничение по времени сделало контрапозицию в данном случае точной.

**Пример 4.** Исходная фраза:

*«Если пойдет дождь, на улице появятся лужи.»* (9)

Контрапозиция (по Г.Е.Горелику):

*«Если не появятся лужи, то это будет означать, что дождя не было.»* (10)

Мы видим, что контрапозиция оказывается точной по смыслу, ограничение по времени здесь неявно присутствует – лужи должны появиться почти сразу же после начала дождя.

**Замечание.** Несогласованность причинности и языка логики иногда возникает даже в высказываниях, использующих настоящее время.

Как хорошо известно, в формальной логике высказывания

*«А тогда и только тогда, когда В»*

и

*«В тогда и только тогда, когда А»*

равносильны, означают в точности одно и то же. Рассмотрим, однако, следующий

**Пример 5.** Исходное предложение:

*«Люди взрослеют тогда и только тогда, когда у них накапливается жизненный опыт.»* (11)

Строим формально равносильное высказывание:

*«Жизненный опыт накапливается у людей тогда и только тогда, когда они взрослеют.»* (12)

Однако последнее высказывание выглядит нелепо. Несмотря на то, что здесь мы имеем дело не с импликацией, а с эквиваленцией, причинная связь событий (сначала опыт,



потом взросление) не дает нам возможности переставлять части высказывания.

В заключение заметим следующее. Во многих задачах по формальной логике приводятся примеры, в которых явно или неявно присутствует причинная связь описываемых событий. На наш взгляд, необходимо объяснять учащимся тонкости взаимодействия правил формальной логики и феномена причинной связи событий, подчеркивая тем самым тонкое, но существенное различие между возможностями естественного языка и правилами языка логики.

## **Добавление 2.**

### ***Первый парадокс школьной теории множеств [6]***

Понятие множества, лежащее в фундаменте всей математики, чрезвычайно привлекательно с точки зрения его использования в начальной школе. Почему? Потому, что позволяет сформировать и «пришпилить к бумаге» важные характеристики, общие для, казалось бы, совершенно разных задач, доступных детям. При этом речь идет, конечно же, о так называемой «наивной» теории множеств, в которой не обсуждаются глубокие и серьезные парадоксы, бросающие вызов здравому смыслу. (Парадокс, связанный с понятием множества всех множеств, парадокс кучи и др.) Для преодоления упомянутых парадоксов была создана аксиоматическая теория множеств, которой мы касаться вообще не будем.

Несмотря на наличие не преодоленных противоречий, именно наивная теория множеств – инструмент, которым пользуются математики, работающие в прикладных областях. Если уж таким специалистам подходит для работы наивная теория множеств (несмотря на ее скрытые дефекты), то, наверно, и для школьной математики эти дефекты

не будут опасны? Ниже мы столкнемся с неожиданным поворотом темы, связанной с парадоксами – именно на школьном уровне.

Вначале – о привлекательности наивной теории множеств для маленьких детей. Пусть даны следующие две задачи (для первоклассников).

В задаче № 1 к трем утятам приплыли два гусенка, и требуется найти общее количество птичек, а в задаче № 2 к семи слонятам прибежали три мышонка, и требуется найти общее количество зверят. Техника наивной теории множеств (диаграммы Эйлера) позволяет фактически изобразить суть обеих задач на картинках одного и того же типа (см. рис. 1). (Если бы слонят было столько же, сколько утят, а мышат – столько же, сколько гусят, то достаточно было бы одной картинки, общей для обеих задач.)

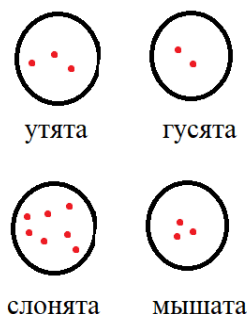


Рис. 1

Эти картинки, взятые вместе, адекватно изображают таинственный и непостижимый процесс обобщения, наверняка происходящий в подсознании ребенка, когда он внешне догадывается, что обе задачи, в сущности, об одном и том же...

Аналогичным образом к диаграммам одного типа приводятся следующие две, казалось бы, разные задачи. В за-

даче № 3 на ветке сидели 7 синих птиц и 6 воробьев, причем общее количество птиц на ветке равнялось 8. Требуется узнать количество синих воробьев на ветке. А в задаче № 4 из зоопарка сбежали 9 розовых животных и 8 обезьян, причем всего сбежало из зоопарка 10 животных. Требуется узнать, сколько розовых обезьян сбежало из зоопарка. На рис. 2 изображены диаграммы Эйлера, пригодные для решения задач № 3 и № 4. Если не изображать точками элементы соответствующих множеств, то, очевидно, что для обеих задач хватило бы одной диаграммы. И смысл такой диаграммы (наличие непустого пересечения множеств) прекрасно усваивался бы детьми, поскольку она (судя по всему) - отличное подкрепление процесса обобщения, протекающего у ребенка при решении задач № 3 и № 4.

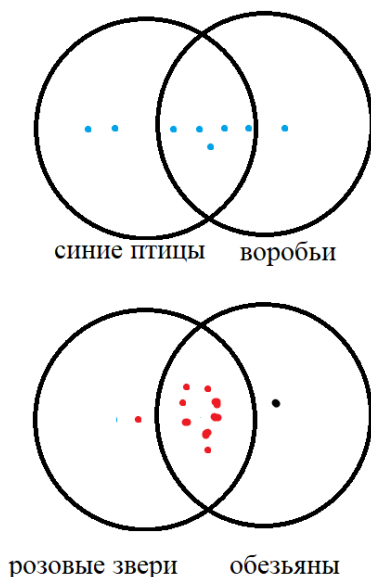


Рис. 2

Итак, может показаться, что, чем раньше мы введем понятие множества в школьную математику, тем будет лучше. Именно потому, что техника диаграмм Эйлера представляет собой легкий и понятный язык, который к тому же нравится детям.

И здесь нас подстерегают интересные неожиданности. Прежде всего, оказывается, что понятие множества – не самое глубокое в математике... Вот как это обнаруживается.

В некоторых учебниках для начальной школы говорится примерно следующее:

**«Множества {малина, клубника} и {клубника, малина} равны»**

(см. в этой связи, например, [12, с. 7]).

Тем самым детям дают понять, что порядок элементов во множестве неважен.

Попробуем теперь задать ученикам, познакомившимся с этим определением, следующий вопрос.

– Я зажал в левой руке монету достоинством в 1 рубль и в правой руке – монету достоинством в 1 рубль. Равны ли множества монет, зажатых в моих руках?

Многочисленно проверено, что дети дают ответ: «Да, равны!» Ответ этот, очевидно, неправильный. (О возникающей здесь интереснейшей проблеме нам рассказал проф. А.Л. Чекин.)

Вот мы и подобрались к понятиям, еще более глубоким, чем понятие множества.

Эти понятия – «такой же» и «тот же самый».

Попытаемся теперь решить возникающую проблему:

А) объяснить детям на страницах учебника (при помощи иллюстраций), что два множества равны, если они сов-

падают, т.е. состоят из одних и тех же элементов (а не просто из «таких же точно»!);

Б) показать при помощи все тех же иллюстраций, что порядок элементов в множестве не имеет никакого значения.

Важно понимать, что огромную роль для формирования правильного восприятия понятия «множество» у детей играют именно иллюстрации, одних только слов в тексте учебника недостаточно. На наш взгляд, жалобы педагогов на то, что «дети не понимают, что такое множество» имеют в качестве причины не непонятливость детей, а двусмысленность определений, обычно даваемых в учебниках.

К счастью, упомянутая выше проблема решаема. Итак, на рис. 3 изображен человек, настенные часы и две фабричные банки варенья, стоящие на полке. Слева – малиновое варенье, справа – клубничное. Ниже, на рис. 4, изображен все тот же самый (а не такой же!) человек, протянувший руку к банкам с вареньем. Видно, что теперь банки стоят в другом порядке: слева – клубничное варенье, справа – малиновое. Кроме того, на рис. 4 видно, что минутная стрелка сдвинулась (допустим, на 5 минут). Все это не оставляет сомнений в том, что на рис. 4 изображены те же самые банки, что и на рис. 3 (а не просто такие же!).

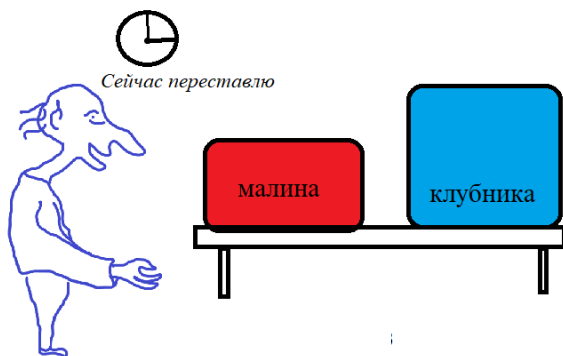


Рис. 3

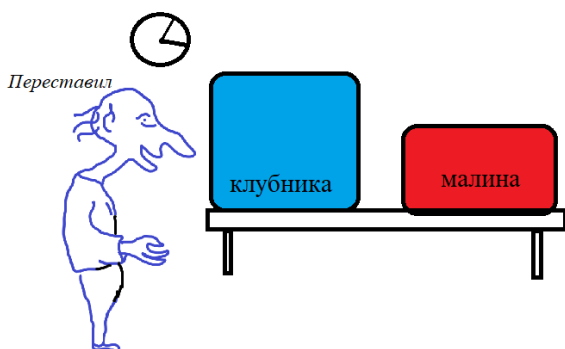


Рис. 4

Дальше уже можно перейти к словесному комментарию: «Множества банок с вареньем на рис. 3 и на рис. 4 равны». Эти множества можно обозначить, например, буквами  $P$  и  $Q$  и записать равенство:  $P = Q$ .

Заодно становится понятно, зачем иногда дают одному и тому же множеству два разных имени (а иногда даже больше имен). Этот вопрос часто остается невысказанным детьми, но подспудно он их наверняка тревожит. Картинки типа рис. 3 и рис. 4 дают на этот вопрос ясный и убедительный ответ:

«Одно и то же множество может быть получено разными способами, например, двумя. Заранее может быть неизвестно, что оба раза получается одно и то же множество. Поэтому и требуются два разных имени; ставя знак равенства между этими именами, мы и утверждаем, что получили одно и то же множество.»

После такой предварительной подготовки ребенок (да и взрослый тоже) уже не скажет, что на рис. 5 множества банок на верхней и нижней полке равны между собой.

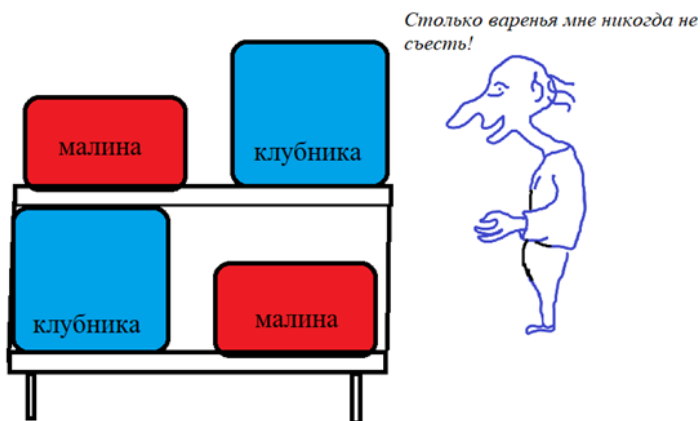


Рис. 5.

\* \* \*

Итак, мы почти разобрались с Первым школьным парадоксом наивной теории множеств. Заодно обнаружилось, что понятие «жизнь» (живой персонаж) может оказаться полезным при изложении школьных основ наивной теории множеств.

Осталось сказать еще несколько слов о конфликте логики и педагогики, возникающем как раз в связи с затронутой темой. Казалось бы, если равенство множеств – это их совпадение, а не их одинаковость, то надо срочно кое-что менять в геометрии. Действительно, каждый треугольник – это множество точек на плоскости. И если мы хотим сказать, что два треугольника совершенно одинаковы, то говорить, что треугольники равны – нехорошо. В 70-е годы прошлого столетия группа математиков под руководством крупнейшего ученого, акад. А.Н. Колмогорова провела реформу школьных учебников по математике, целью реформы была бóльшая строгость изложения. При этом приме-

нявшийся до реформы термин «равенство треугольников» был заменен на «конгруэнтность треугольников». Изложение стало более корректным, но школьники перестали понимать геометрию. Не все, конечно, но довольно-таки многие. В результате пришлось вернуться к «равенству треугольников» ...

**Замечание.** Кроме Первого парадокса школьной теории множеств существует еще и Второй парадокс. Суть его в том, что, перечисляя элементы множества в фигурных скобках, мы обычно не делаем различия между самим элементом и его именем. Возникающие здесь проблемы обсуждаются в [7].

### **Добавление 3.**

#### ***Моделирование в педагогическом процессе и понимание [8]***

Когда мы говорим:

*«Ученик понял рассказ Рэя Брэдбери “И грянул гром”»*  
(1)

и когда мы утверждаем:

*«Ученик понял теорему Евклида о бесконечности множества простых чисел»,*  
(2)

то имеем в виду совершенно разные психические процессы, протекавшие в мозге ученика и наверняка происходившие в разных отделах его мозга.

Понимание художественного текста может иметь совершенно разную степень глубины, зависеть от вкусовых пристрастий и сопутствующих обстоятельств.

Что касается понимания доказательства математической теоремы, то оно (скорее всего) сводится к двум важнейшим вещам:



(а) локальному пониманию каждого логического перехода;

(б) интегральному пониманию математического доказательства как единого целого, состоящего из серии логических переходов.

От каких-либо пристрастий читателя такое математическое понимание обычно не зависит. Оно либо есть, либо его нет.

Тем не менее, общий термин «понимание» для таких, казалось бы, непохожих друг на друга психических процессов ни у кого не вызывает возражений.

Связано это, видимо, с тем общим, что характеризует понимание какой-либо теоремы и понимание прозаического или даже поэтического текста.

Это общее заключается, возможно, в следующем (см. в этой связи [10], [11]).

*Понимание – это приобретение чего-либо (нематериального) человеческим «Я».*

Ниже мы будем говорить исключительно о понимании математических текстов, оставляя в стороне поэзию, прозу и др.

Мы попытаемся разобраться в некоторых особенностях процесса понимания математических текстов на примере одной простейшей задачи, доступной школьникам (в том числе – младшим).

Речь пойдет о том, почему моделирование резко расширяет возможности математического понимания.

Как утверждают психологи, среднему человеку удастся одновременно и притом эффективно оперировать не более, чем с тремя-четырьмя объектами. Это прекрасно подтвер-

ждается строением фраз естественного языка, в которых основными «действующими лицами» обычно являются подлежащее, сказуемое и прямое дополнение. Конечно, фразы могут иметь и более сложную структуру, но число взаимодействующих словесных блоков все равно не должно превышать все того же количества (трех – четырех). Глядя на текст «под микроскопом» мы сталкиваемся все с тем же ограничением. Например, количество прилагательных (или эпитетов), относящихся к какому-либо слову, также не может превышать упомянутого числа.

Например, фраза

*«Петя съел несколько небольших импортных розовых, ароматных, аппетитных, круглых и упругих тонкокожих помидоров»*

– нечитаема. Именно потому, что эпитетов слишком много для человеческой рабочей памяти.

Перейдем сейчас к пониманию математических утверждений и к той роли, которую для понимания играет моделирование (прежде всего – геометрическое).

Итак, пусть перед нам поставлена следующая

**Задача.** Правильная ли форма у следующего рассуждения:

*Все шахматисты – математики*

*Все аквалангисты – водолазы*

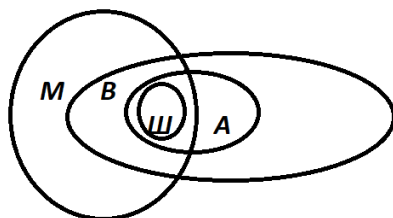
*Некоторые водолазы – не математики*

*Некоторые шахматисты – не аквалангисты*

Попробуйте решить эту задачу, не привлекая себе на помощь никакие (даже мысленные) геометрические образы (типа кругов Эйлера), а только рассуждая строго логически. Задача окажется весьма трудной, а кому-то может показаться вообще нерешаемой при наложенном ограничении.

В то же время, используя рисунок, на котором упомянутые множества спортсменов обозначены буквами, легко получаем отрицательный ответ на вопрос задачи.

Из рис. 1 видно, что, не нарушая условий задачи, можно (геометрически!) представить себе ситуацию, когда все шахматисты окажутся аквалангистами.



*М - математики, В - водолазы,  
Ш - шахматисты, А - аквалангисты*

Рис. 1

В чем же дело? Почему задача вдруг стала намного легче? Какова здесь связь с объемом рабочей памяти человека, позволяющей ему эффективно работать лишь с малым числом объектов?

В нашей задаче таких объектов, которые требуют нашего одновременного внимания, всего-навсего четыре. (Это упомянутые множества шахматистов, математиков, аквалангистов и водолазов.) Как мы только что видели, четыре – это для нашего воображения уже много!

В чем же секрет геометрической модели? Почему нашей рабочей памяти работать с ней намного легче, чем с исходной «абстрактной» постановкой? Дело, очевидно, в том, что (см. рис. 1) здесь можно работать с четырьмя объектами, как с двумя. А именно, начинаем варьировать положение овала А, оставляя остальные овалы и круги неподвижными и рассматривая их как единое целое. Если не

удается найти опровержение утверждения задачи, начинаем варьировать, например, положение овала В (а остальные овалы и круги фиксируем на своих местах и рассматриваем теперь их как единое целое). Фактически, удастся начать действовать «методом перебора» и затем быстро решить задачу.

Итак, построение геометрической модели для какой-либо задачи не просто позволяет выявить связи между объектами, но дает возможность манипулировать каким-то одним из них (или двумя), временно фиксируя остальные. Это часто позволяет «уместить» в рабочей памяти человеческого мозга такую задачу, которая в исходном виде представляла для рабочей памяти слишком громоздкий объект.

Осознание этой роли моделирования, на наш взгляд, весьма полезно при решении математических задач.

## Литература

[1] Локшин А.А., Сагомоян Е.А. О симметрической разности множеств и ее применениях / Тенденции развития науки и образования, № 110, июнь, 2024, ч. 1.

[2] Никольская И.Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1981. – 127 с.

[3] Мерзон А.Е., Добротворский А.С. Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. – М., 1998 – 448 с.

[4] Локшин А.А., Сагомоян Е.А. Логика и множества. – М.: Вузовская книга, 2002. – 64 с.

[5] Локшин А.А., Сагомоян Е.А., Лаврова Н.Н. Причинное следование и закон контрапозиции / Тенденции развития науки и образования, 2022.

[6] Локшин А.А. Первый парадокс школьной теории множеств / Педагогические технологии, 2024, № 1, с. 75–79.

[7] Локшин А.А. Мешки, множества и математика для детей. – М.: МАКС Пресс, 2015. – 28 с.

[8] Локшин А.А., Бахтина О.В. Понимание и моделирование в педагогическом процессе обучения школьников математике / Педагогические технологии, 2024, № 1, с. 29–32.

[9] Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка. – М.: МЦНМО, 2004. – 165 с.

[10] Шадриков В.Д. Мысль и познание. – М.: Логос, 2014. – 280 с.

[11] Макарова К.В. К вопросу о сущности и факторах понимания / Школа будущего. – 2018. – № 6. – С. 116–122.

[12] Петерсон Л.Г. Математика. 3 класс. Часть 1. – М.: Ювента, 2004.

[13] Локшин А.А., Лаврова Н.Н. О понимании детьми математических текстов / Педагогические технологии, 2024, № 1, с. 32–36.

Reviewer:

*E.A. Sagomonyan* – Ph.D. in Physics and Mathematics,  
Associate Professor of the Department of Wave and Gas Dynamics,  
Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University

**A.A. Lokshin, E.A. Ivanova, O.V. Bakhtina**

**Sets and Logic:** manual. – 3<sup>nd</sup> ed., rev. and exp. – Moscow: MAKSPress, 2025. – 88 p.: ill.

ISBN 978-5-317-07366-4

<https://doi.org/10.29003/m4365.978-5-317-07366-4>

The manual, intended for students of pedagogical institutes and colleges – future primary school teachers – presents the basics of two most important topics that contribute to the formation of conceptual thinking. In the third edition, Chapter 1 includes new material related to unexpected properties of the symmetric difference of sets, and Chapter 2 expands the material devoted to the geometric analysis of the correctness of inference forms. New material added in Chapter 2 may be useful to lawyers.

Appendices 1–3, which appeared in the new edition, examine paradoxical interaction of the contraposition law and causal inference, as well as a number of questions related to mathematical texts understanding.

*Keywords:* set operations, propositions, predicates, quantifiers, inferences.

*Учебное издание*

ЛОКШИН Александр Александрович  
ИВАНОВА Елена Алексеевна  
БАХТИНА Ольга Витальевна

## МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

*Учебное пособие*

3-е издание, исправленное и дополненное

Подготовка оригинал-макета:  
*Издательство «МАКС Пресс»*  
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*  
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*  
Обложка: *А.В. Кононова*

*В издании использованы рисунки А.А. Локишина*

Подписано в печать 10.03.2025 г.  
Формат 60 х 90 1/16. Усл. печ. л. 5,5. Тираж 25 экз. Заказ 028.

Издательство ООО «МАКС Пресс».  
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,  
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.  
Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,  
корп. 5, эт. 1, пом. 1, ком. 6.3-23Н

